
BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
E
11
NAPOLI

TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*







A PARIS,

Chez { La Veuve de JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roi, & de l'Academie Roïale des Sciences:
ET
JEAN BOUDOT Fils, Imprimeur Ordinaire du Roy & de l'Academie Roïale des Sciences, ruë S. Jacques, au Soleil d'Or, prés S. Severin. }

M. DCCVII.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.



AVERTISSEMENT
DU LIBRAIRE.



L'Illuſtre & ſçavant Auteur de cet Ouvrage étoit ſur le point de le donner au Public, lorſqu'il mourut âgé ſeulement de quarante-trois ans: ce fut au commencement de 1704. *Le Manuſcrit en étoit ſans Préface que ce ſeul Auteur pouvoit bien faire: c'eſt pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre ſuffira ſans doute aux Connoiſſeurs, pour voir de quelle conſequence en Géometrie eſt la matiere de ce Livre, & la grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre, répond auſſi aſſez, ce me ſemble, de l'habileté avec laquelle j'ai appris que cette matiere y eſt traitée. C'eſt ce qui m'a déterminé à imprimer ce Manuſcrit tel qu'il étoit, ſans autre ſoin que de faire enſorte qu'il le fût le*

plus correctement qu'il me seroit possible, en cherchant quelque habile Geometre, qui voulût bien veiller à l'impression. C'est aussi ce que la consideration des Sçavans pour l'Auteur, & l'estime pour l'Ouvrage que plusieurs avoient déja vû en Manuscrit, m'ont fait heureusement trouver : estime deja tellement répanduë, que les empressemens d'un trés-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, qui pendant le cours de l'impression venoient me le demander avec une espece d'impatience de le voir, sur tout les jeunes Geometres, qui sur ce qu'ils en avoient entendu, le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime Analyse des Infiniment petits *de l'Auteur, m'ont forcé en quelque façon de le donner sans la Préface que je pensois pourtant à y faire faire, me disant qu'ils aimoient mieux s'en passer, que d'attendre plus long-temps que la maladie d'un des deux Geometres qui ont bien voulu revoir les Epreuves de cet Ouvrage, ou les affaires de l'autre, permissent à un d'eux de la faire. Ces empressemens, les soins de ces deux Messieurs, & les miens, me font esperer que le Lecteur sera content & du fond de l'Ouvrage, & de la maniere correcte dont il est imprimé. C'est tout ce qu'en peut dire un homme de ma profession : les Geometres en jugeront.*

TRAITE'



TRAITÉ ANALYTIQUE
DES SECTIONS CONIQUES,

Et de leur usage pour la Résolution des Equations dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole.

DE'FINITIONS.

I.



YANT placé sur un plan une Régle BC, & une E'querre GDO, en sorte que l'un de ses côtés DG soit couché le long de cette régle, on prendra un fil FMO égal en longueur à l'autre côté DO de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extrêmité O de ce côté DO, & l'autre bout en un point quelconque F pris sur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la régle. Maintenant FIG. 1.

ſi l'on fait gliſſer le côté DG de l'équerre le long de la régle BC, & qu'en même tems l'on ſe ſerve d'un ſtyle M pour tenir toujours le fil tendu, & ſa partie MO toute jointe & comme collée contre le côté OD de l'équerre ; la courbe AMX que le ſtyle M décrit dans ce mouvement, eſt une portion de Parabole.

Si l'on renverſe l'équerre de l'autre côté du point fixe F, on décrira en la même façon l'autre portion AMZ de la même Parabole ; de ſorte que la ligne XAZ ne fera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne BC dans laquelle le bord inferieur de la régle immobile BC touche le plan & le côté DG de l'équerre GDO, eſt appellée *Directrice*.

3.

Le point fixe F du plan, eſt nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on méne du point fixe F, ſur la directrice BC une perpendiculaire FE qui rencontre la parabole au point A ; la ligne AF indefiniment prolongée du côté de F, eſt appellée *l'Axe* de la parabole.

5.

La ligne p quadruple de AF, eſt appellée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme MP menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, ſont appellées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme MO menées des points de la parabole parallelement à l'axe, en ſont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

COROLLAIRE I.

1. Il suit de la définition de la Parabole, que si l'on tire par un de ses points quelconques *M* au foyer *F* une ligne droite *MF*, & sur la diréctrice *BC* une perpendiculaire *MD*; les droites *MF*, *MD*, seront toûjours égales entre elles. Car si l'on retranche du côté *OD* de l'équerre & du fil *OMF* qui * lui est égal, la partie commune *OM*, il est visible que les parties restantes *MD*, *MF*, seront toûjours égales entre elles. * *Déf.* 1.

COROLLAIRE II.

2. De-là il est évident, que si l'on méne une ligne droite quelconque *KK* parallele à la diréctrice *BC*, & que d'un point quelconque *M* de la parabole, on tire sur cette ligne la perpendiculaire *MK*, & au foyer la droite *MF*; la difference ou la somme *KD* des deux droites *MF*, *MK*, sera toûjours la même : savoir la difference lorsque le point *M* tombe au dessous de *KK*, & la somme lorsqu'il tombe au dessus.

COROLLAIRE III.

3. Il est évident que *FE* est divisée en deux parties égales par la parabole au point *A*. Car supposant que le point *M* tombe au point *A*, la ligne *MF* tombe sur *AF*, & la ligne *MD* sur *AE*, qui seront par conséquent égales entre elles ; puisque *MF* est toûjours * égale à *MD*, en quelque endroit de la parabole que tombe le point *M*. * *Art.* 1.

COROLLAIRE IV.

4. De-là on voit comment on peut décrire une parabole *XAZ*, l'axe *AP* dont le point *A* est l'origine étant donné, avec son parametre *p*. Car ayant pris sur l'axe *AP* de part & d'autre du point *A* les parties *AF*, *AE* égales chacune au quart de son parametre *p*, & mené par le point *E* la perpendiculaire indéfinie *BC* sur *FE*; si l'on couche le bord inferieur d'une régle sur cette ligne

BC qui sert de diréctrice, & que par le moyen d'une équerre ODG, & d'un fil FMO égal au côté OD, & attaché par l'un de ses bouts au foyer F, & par l'autre bout à l'extrémité O de ce même côté, l'on décrive une Parabole XAZ comme l'on a enseigné dans la définition premiére, il est visible qu'elle sera celle qu'on demande.

* Déf. 1. Il n'est pas moins visible que plus le côté OD de l'équerre & le fil OMF (qui* lui doit être égal) sera long, plus aussi la portion de la parabole qu'on décrira sera grande; de sorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté OD de l'équerre & le fil OMF.

COROLLAIRE V.

5. Si d'un point quelconque M de la Parabole l'on méne une ordonnée MP à l'axe, & au foyer F la droite MF; il est clair que cette ligne $MF = AP + AF$,
* Art. 3. puisque $MF = MD = AP + AE$, & que *$AF = AE$.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 1. 6. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* AP, *est égal au réctangle du parametre* p, *par la partie* AP *de l'axe prise entre son origine* A *& la rencontre* P *de l'ordonnée.*

Il faut prouver que $\overline{MP}^2 = p \times AP$.

Ayant nommé la donnée AF, m; & les indéterminées
* Art. 5. AP, x; PM, y; on aura $MF =$ *$m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, selon que le point p se trouve au dessous ou au dessus du foyer F. Or le triangle réctangle MPF donne en l'un & l'autre cas $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2$ $(yy) + \overline{PF}^2$ $(mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puisque selon la 5e. définition $p = 4m$, on aura aussi $yy = px$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. Il est donc évident que si l'on nomme p le parametre de l'axe AP; chacune de ses parties AP, x; & chacune de ses ordonnées correspondantes PM, y; on aura toûjours $yy = px$. Or comme cette proprieté convient à tous les points de la parabole, & en détermine la position par rapport à son axe AP; il s'ensuit que l'équation $yy = px$ exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à son axe. FIG. 2.

COROLLAIRE II.

8. Si l'on méne deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe AP, leurs quarrés seront entr'eux comme les parties AP & AQ de l'axe, prises entre son origine A & les rencontres P & Q de ces mêmes ordonnées. Car* $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: p \times AP . p \times AQ :: AP . AQ$. FIG. 2.

* Art. 6. 7.

COROLLAIRE III.

9. Si l'on méne par un point quelconque P de l'axe AP une parallele MPM à ses ordonnées; elle rencontrera la parabole en deux points M & M également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M & M soient à la parabole, il faut* que les quarrés de chaque PM (y) prise de part & d'autre du point P, soient égaux chacun au même rectangle px.

* Art. 7.

COROLLAIRE IV.

10. Il suit de ce que* $yy = px$, que plus AP (x) est grande, plus aussi l'ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe AP augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus AP (x) diminuë, plus aussi l'ordonnée PM (y) devient petite: de sorte que AP (x) étant nulle ou zero, chaque PM (y) prise de part & d'autre de l'axe AP devient aussi nulle; c'est-à-dire que le point P tombant en A, les deux points de rencontre M & M se réu-

* Art. 7.

niſſent en ce point. D'où il eſt clair.

1°. Que ſi l'on méne par l'origine *A* de l'axe une ligne *LL* parallele à ſes ordonnées, elle ſera tangente en *A*.

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de ſon axe *AP* à commencer par ſon origine *A*; & qu'ainſi toute parallele comme *LM* à l'axe *AP*, ne rencontre la Parabole qu'en un ſeul point *M*, & paſſe au dedans, puiſque ſa diſtance de l'axe demeure partout la même.

COROLLAIRE V.

11. SI d'un point quelconque *M* de la Parabole l'on tire une parallele *ML* à l'axe *AP*, laquelle rencontre en *L* la parallele *AL* à ſes ordonnées; il eſt clair en ménant l'ordonnée *MP*, que $AL = PM\,(y)$, & que $ML = AP$

* Art. 7. $(x) = \frac{yy}{p}$, puiſque * $px = yy$. D'où il ſuit que les droites $ML\left(\frac{yy}{p}\right)$, $ML\left(\frac{yy}{p}\right)$ priſes de part & d'autre de l'axe *AP* ſont égales entr'elles, lorſque les points *L*, *L* ſont également éloignés du point *A*; & partant que ſi une ligne quelconque *MM* terminée par la parabole eſt coupée en deux parties égales par l'axe en *P*, elle ſera parallele à la ligne *LL*, c'eſt à dire qu'elle ſera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les paralleles *ML*, *ML* à l'axe *AP*, il eſt évident que *LL* ſera diviſée par le milieu en *A*, puiſque *MM* l'eſt en *P*. Les droites *ML*, *ML*, ſeront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par conſéquent la ligne *MM* ſera parallele à *LL*.

COROLLAIRE VI.

12. IL ſuit de ce que toutes les perpendiculaires *MPM* à l'axe *AP*, terminées de part & d'autre par la pa-

* Art. 9. rabole, ſont * coupées par le milieu en *P*; que l'axe diviſe la parabole en deux portions entierement égales & ſemblablement poſées de part & d'autre. Car ſi le plan ſur lequel elle eſt tracée, étoit plié le long de l'axe enſorte

que les deux parties se joignissent, il est visible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une sur l'autre.

PROPOSITION II.

Theorême.

13. SI *l'on mene par l'origine* A *de l'axe* AP *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un ou l'autre des angles* PAL, PAL, *faits par l'axe* AP *&* *par la ligne* LL *parallele à ses ordonnées ; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole* MAM *en un autre point* M. FIG. 3.

Ayant pris sur *AL* de part ou d'autre du point *A* la partie *AG* égale au parametre *p* de l'axe, & tiré *GF* parallele à l'axe *AP*, & qui rencontre la ligne *AM* (prolongée s'il est necessaire) au point *F* ; on prendra sur la ligne *AL* du même côté où tombe la ligne *AM* par rapport à l'axe *AP*, la partie *AL* égale *GF* ; & ayant tiré *LM* parallele à l'axe, je dis que le point *M* où cette ligne rencontre la droite *AM*, sera à la parabole *MAM*.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les triangles semblables *FGA*, *APM*, donneront *FG* ou *AL* ou *PM*. *GA* :: *AP*. *PM*. Et partant $\overline{PM}^2 = GA(p) \times PA$. La ligne *PM* sera donc * une ordonnée à l'axe *AP*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 7.

COROLLAIRE I.

14. DE là on voit comment l'axe *AP* d'une parabole *MAM* étant donné avec son parametre *p*, & ayant mené par l'origine *A* de l'axe dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*, faits par l'axe *AP* & par la ligne *LL* parallele à ses ordonnées, une ligne droite quelconque *AM* ; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre la parabole *MAM*.

COROLLAIRE II.

* Art. 10. 13.

15. Il est évident * qu'il n'y a que la ligne LAL parallele aux ordonnées à l'axe AP, qui puisse être tangente de la parabole MAM au point A origine de l'axe; puisqu'il n'y a que cette seule ligne qui passant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

DÉFINITIONS.

9.

FIG. 4. & 5. Si l'on mene par un point quelconque M de la parabole un diametre MO, une ordonnée MP à l'axe AP, & une ligne droite MT qui coupe sur l'axe AP prolongé au delà de son origine A, la partie AT égale à AP; toutes les lignes droites, comme NO, menées des points de la parabole parallelement à MT, & terminées par le diametre MO, sont appellées *Ordonnées* à ce diametre.

10.

Si l'on prend la ligne q troisiéme proportionnelle à AT, MT; cette ligne q sera nommée le *Parametre* du diametre MO.

COROLLAIRE I.

16. Si l'on nomme l'indéterminée AP ou AT, x; il est clair que $\overline{MT}^2 = qx$, puisque $AT\ (x).\ MT :: MT.\ q$.

COROLLAIRE II.

* Art. 7.

17. A Cause du triangle réctangle MPT, le quarré $\overline{MT}^2\ (qx) = \overline{PT}^2\ (4xx) + \overline{MP}^2$ * (px); d'où, en divisant par x, l'on tire $q = 4x + p$.

C'est à dire que le parametre q d'un diametre quelconque MO, surpasse le parametre p de l'axe du quadruple de $AP\ (x)$.

COROLLAIRE III.

* Art. 5.

18. Si l'on tire du point M au foyer F la droite MF, on aura MF * $= AP + AF$. Or selon la définition 5e. le

le parametre de l'axe étant $p=4AP$, le parametre du diametre MO sera * $q=4AP+4AF$. Donc le parametre q d'un diametre quelconque MO, vaut quatre fois la ligne MF tirée de son origine M au foyer F. * Art. 17.

PROPOSITION III.

Theorême.

19. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* MO, *est égal au rectangle du parametre* q, *par la partie* MO *de ce diametre, prise entre son origine* M *& la rencontre* O *de l'ordonnée.* FIG. 4. 5.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 = q \times MO$.

Ayant mené l'ordonnée NQ à l'axe AP, laquelle rencontre le diametre MO au point R, & tiré OH parallele à MP, on nommera les données AP ou AT, x; PM ou RQ, y; & les indéterminées OR ou HQ, a; MO ou PH, b; les triangles semblables TPM, ORN, donneront cette proportion $TP\ (2x).\ PM\ (y) :: OR\ (a).\ RN = \frac{ay}{2x}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 4.) $NQ = RQ\,(y) - RN\left(\frac{ay}{2x}\right)$, ou $RN\left(\frac{ay}{2x}\right) - RQ\,(y)$, & $AQ = AH\,(x+b) - HQ\,(a)$, lorsque le point N tombe du côté de l'axe AP par rapport au diametre MO; & qu'au contraire (*fig.* 5.) $NQ = RQ\,(y) + RN\left(\frac{ay}{2x}\right)$, & $AQ = AH\,(x+b) + HQ\,(a)$, lorsqu'il tombe du côté opposé: on aura $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, & $AQ = x + b \pm a$, sçavoir $-$ dans le premier cas, & $+$ dans le second. Or * $AP\ (x).\ AQ\ (x+b\pm a) :: \overline{PM}^2\ (yy).\ \overline{QN}^2 = yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x}$. On formera donc en comparant ensemble ces * Art. 8.

deux valeurs de $\overline{QN}^2$, l'égalité $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$; d'où en effaçant de part & d'autre $yy \pm \frac{ayy}{x}$, divisant par yy, & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR}^2 (aa) = 4bx$. Mais les triangles semblables *MPT*, *NRO*,
* *Art.* 16. donnent $\overline{PT}^2 (4xx) . \overline{OR}^2 (4bx) :: \overline{MT}^2$ * $(qx) . \overline{ON}^2 = bq = q \times MO(b)$. *Ce qu'il falloit &c.*

COROLLAIRE GENERAL.

20. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la proposition premiere par rapport à l'axe *AP*, à ses ordonnées *PM*, & à son parametre *p*, s'étend par le moyen de cette derniere proposition à un diametre quelconque *MO*, à ses ordonnées *ON*, & à son parametre *q*. Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15. se tirent de la premiere proposition, & subsistent également, soit que les angles *APM* soient droits, ou bien qu'ils ne le soient pas; il s'ensuit que si l'on imagine dans ces articles que la ligne *AP*, au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*, & pour parametre la ligne *p*, ils seront encore vrais dans cette supposition; car leur démonstration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant partout où se trouve le mot d'axe, celui de diametre.

COROLLAIRE II.

FIG. 4. & 5. 21. COMME les articles 10 & 15 subsistent avec la même force, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque, tel que *MO*; il s'ensuit que la ligne *MT* parallele aux ordonnées *ON* à ce diametre, est tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher la parabole en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

22. DE-LA il est évident selon la définition 9. que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une parabole, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe sur l'axe prolongé du côté de son origine *A*, la partie *AT* égale à *AP*; cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et réciproquement que si la ligne *MT* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'axe; les parties *AT*, *AP*, de l'axe seront égales entr'elles.

COROLLAIRE IV.

23. SI l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la derniere proposition, que la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*; on verra que cette proposition sera encore vraye, puisqu'elle se démontrera de la même maniere qu'auparavant, comme il est évident par la seule inspection de la fig. 6. où les triangles semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe. FIG. 6.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque. 2°. Que le diametre *MO* peut être l'axe dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder l'axe comme un diametre qui fait avec ses ordonnées des angles droits.

PROPOSITION IV.

Theorême.

24. SI *par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à l'axe, & une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui passe par le point* M; *je dis que la partie* PG *de l'axe sera toujours égale à la moitié de son parametre* p. FIG. 7.

Il faut prouver que $PG = \frac{1}{2}p$.

Car à cause des angles droits TPM, TMG, on aura $TP(2x)$. $PM(y)$ :: $PM(y)$. $PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$, en mettant à la place de yy sa valeur * px.

* Art. 7.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 7. 25. *Si par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene au foyer* F *la droite* MF, *un diametre* MO, *& une tangente* TMS; *les angles* FMT, OMS, *faits par la tangente* TMS *d'un côté avec la droite* MF, *& de l'autre avec le diametre* MO, *seront égaux entr'eux.*

Car menant l'axe AP qui rencontre en T la tangente TMS, & l'ordonnée MP à l'axe; on aura * $TA + AF$ ou $TF = AP + AF$ ou * MF. Le triangle TFM sera donc isoscelle; & par conséquent l'angle FTM, ou son égal OMS, sera égal à l'angle FMT. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 22. * Art. 5.

COROLLAIRE.

26. De-là il est clair que la tangente TMS prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse la parabole toute entiere du côté de son foyer F. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant M, il s'ensuit que cette ligne courbe est concave dans toute son étenduë autour de son foyer F.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 8. & 9. 27. *Un diametre* AP *avec la tangente* LAL *qui passe par son origine* A, *& son paramettre étant donnés; trouver un diametre* BQ *qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées, un angle égal à l'angle donné* K, *son origine* B, *& son parametre.*

Ayant mené par l'origine *A* du diametre donné la ligne *AE* qui fasse avec ce diametre de part ou d'autre, l'angle *PAE* égal à l'angle donné *K*, & trouvé * sur cette ligne (prolongée de l'autre côté de *A* lorsqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*) le point *M* où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu *Q* de la ligne *AM*, une parallele *QD* au diametre *AP*, qui rencontre la tangente *AL* au point *D*; & on divisera *QD* par le milieu en *B*. Je dis que la ligne *BQ* est le diametre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point *B*, & pour parametre une troisiéme proportionnelle à *BQ*, & *QA*. *Art. 14 & 20.

Car 1°. La ligne *AM* étant divisée en deux parties égales au point *Q* par le diametre *BQ*, elle sera ordonnée * de part & d'autre à ce diametre; & comme les lignes *BQ*, *AP* sont paralleles entr'elles, l'angle *BQA* que fait le diametre *BQ* avec son ordonnée *QA* sera égal à l'angle *PAM* égal à l'angle donné *K* ou à son complement à deux droits. 2°. Le point du milieu *B* de la ligne *QD* sera l'origine * de ce diametre, puisque *AQ* en est une ordonnée. 3°. Le parametre du diametre *BQ* est * la troisiéme proportionnelle à *BQ*, *QA*. *Art. 11 & 20. *Art. 22 & 23. *Art. 19.

Lorsque l'angle donné *K* n'est pas droit, il est clair qu'on peut mener de part & d'autre du diametre *AP* deux differentes lignes *AE* qui fassent avec ce diametre des angles égaux à l'angle donné *K*; & qu'ainsi on pourra toûjours avoir deux solutions differentes, en observant que si l'une des deux lignes *AE* tomboit sur la tangente *AL*, le diametre donné *AP* satisferoit lui-même à la question. Mais lorsque cet angle *K* est droit, comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne *AE* qui fasse avec le diametre *AP* un angle droit, il s'ensuit qu'on ne peut avoir alors qu'une solution; & qu'ainsi * le diametre cherché sera l'axe. FIG. 8. FIG. 9. *Art. 23.

Il est à remarquer que les deux diametres *BQ*, *BQ*, qui satisfont au Problême lorsque l'angle donné *K* n'est pas droit, sont semblablement posés de part & d'autre FIG. 10.

de l'axe *AP*, & que leurs parametres ſont égaux : ce qui ſe voit par la conſtruction même, en ſuppoſant que le diametre donné *AP* ſoit l'axe, & en menant deux differentes lignes *AE*, *AE* de part & d'autre. Car les triangles réctangles *ALM*, *ALM*, & *ADQ*, *ADQ* étant viſiblement égaux & ſemblables entr'eux, les lignes *AD*, *AD*; *DQ*, *DQ*; leurs moitiés *BQ*, *BQ*; & les
* Art. 19. ordonnées *QA*, *QA* ſeront égales entr'elles ; * & par conſéquent les parametres le ſeront auſſi.

COROLLAIRE

28. Il eſt donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un ſeul diametre qui faſſe avec ſes ordonnées des angles droits ; & qu'ainſi il ne peut y avoir qu'un ſeul axe. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres, qui faſſent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit ; que ces deux diametres ſeront ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

PROPOSITION VII.

Problême.

29. Un *diametre étant donné avec la tangente qui paſſe par ſon origine, & ſon parametre ; décrire la parabole par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit ſelon
Fig. 11. l'article 4e ; mais lorſqu'il ne l'eſt pas, ſoit *MO* le diametre donné, & *TMS* la tangente qui paſſe par ſon origine *M*. Cela poſé.

On prendra ſur le diametre *MO* prolongé au delà de ſon origine *M*, la partie *MD* égale au quart de ſon parametre ; & on tirera une perpendiculaire indéfinie *DE* à *MD*. On menera *MF* qui faſſe avec la tangente *TMS* un angle *FMT* égal à l'angle *OMS* ; & ayant pris *MF* égale à *MD*, on décrira ſelon la définition

premiere, une parabole qui ait pour diréctrice la ligne *DE*, & pour foyer le point *F*. Je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne *MO* étant perpendiculaire à la diréctrice *DE*, sera parallele à l'axe; & par conséquent un diametre selon la définition 7e. 2°. La ligne *TMS* sera * tangente en *M*. 3°. Le parametre du diametre *MO* sera * quadruple de *MF*. * *Art.* 15. * *Art.* 18.

SECONDE MANIERE.

Soit *AP* le diametre donné, & *LAL* la tangente qui passe par son origine *A*. Cela posé. FIG. 12.

Ayant pris sur le diametre *AP* prolongé au delà de son origine *A* la partie *AG* égale à son parametre, & mené une droite indéfinie *DGD* qui fasse avec *AG* l'angle *AGD* égal à l'angle *GAL* pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toûjours parallelement à *AG*, en entraînant par son extrêmité *D* le côté *DA* de l'angle *DAM* égal à l'angle *GAL*, & mobile par son sommet autour du point fixe *A*. Je dis que l'interséction continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les lignes *MP*, *GD* seront égales entr'elles; puisque l'angle *APM* ou *GAL* étant égal à l'angle *AGD*, elles seront également inclinées entre les paralleles *GP*, *DM*. Or les triangles *AGD*, *MPA* sont semblables: car l'angle *MPA* ou *GAL* est égal à l'angle *AGD*; & l'angle *PMA* ou *MAL* égal à l'angle *GAD*, puisque retranchant des angles égaux *GAL*, *DAM*, le même angle *DAL*, les restes doivent être égaux. On aura donc *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*, & partant $GA \times AP = \overline{PM}^2$; d'où il clair que *PM* est* une ordonnée au diametre *AP* qui a pour origine le point *A*, pour tangente la ligne *LAL*, & pour parametre la ligne *AG*. *Ce qu'il falloit, &c.* *Art. 19. & 21.

Si le diametre *AP* étoit l'axe, alors les lignes *GD*, FIG. 13.

AL, seroient paralleles, & la démonstration deviendroit plus facile; car l'on voit tout d'un coup que GD est égale à PM, & que les triangles rectangles AGD, MPA sont semblables; d'où il suit $AG. GD$ ou $PM::$ $PM. AP$. Donc $AG \times AP = \overline{PM}^2$, &c.

PROPOSITION VIII.

Problême.

30. *Un diametre* AP *étant donné avec son parametre, & la tangente* AL *qui passe par l'origine* A *de ce diametre; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui est la même chose) la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 14. Ayant pris sur le diametre AP prolongé au delà de son origine A, la partie AG égale à son parametre, divisé AG en deux parties égales au point D, & mené une ligne droite indéfinie AF perpendiculaire à AG; on décrira d'un point C pris partout où l'on voudra sur DA prolongée indéfiniment du côté de A, comme centre, & du rayon CG, un arc de cercle PF qui coupera le diametre AP & sa perpendiculaire AF en deux points P, F. On menera par le point P une parallele MPM à la tangente AL, sur laquelle on prendra de part & d'autre les parties PM, PM, égales chacune à AF. On trouvera de la même maniere autant de couple de points M que l'on voudra; par lesquels on fera passer une ligne courbe MAM qui sera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs PF passant par le même point G, & ayant leurs centres sur la ligne GA prolongée, s'il est necessaire du côté de A, auront pour diametres les lignes GP; & par conséquent la proprieté de ces cercles donnera toûjours $\overline{AF}^2 = GA \times AP$. Mais chaque PM est* égale à sa correspondante AF, & de plus parallele

* Hyp.

à

à la tangente AL qui passe par l'origine A du diametre AP; elle sera donc * ordonnée à ce diametre. C'est pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par tous les points M, trouvés comme l'on vient d'enseigner.

* Art. 19. & 21.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort prés les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préferent ordinairement cette methode, de les décrire par plusieurs points; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

SECONDE MANIERE.

FIG. 15.

Ayant mené par un point quelconque L de la tangente AL, une parallele indéfinie LF au diametre AP; on prendra sur cette ligne & sur le diametre AP prolongé au delà de son origine A, les parties LE, EE, EE, &c. AF, FF, FF, &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur LE, le point M, en sorte que LM soit troisiéme proportionnelle au parametre donné du diametre AP, & à la partie AL de la tangente. On tirera enfin des points A, M, les lignes AE, AE, AE &c. MF, MF, MF &c; je dis que les points d'intersection N, N, N &c. de chaque AE, avec la correspondante MF, seront tous à la parabole qu'on demande.

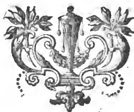
Car menant par le point marqué M, & par l'un des points trouvez N, les lignes MP, NQ, paralleles à la tangente AL, & nommant AP, x; PM ou AL, y; AQ, u; QN, z; les triangles semblables NQA, ALE, & MPF, NQF, donneront ces deux proportions QN (z). QA (u) :: AL (y). LE ou $AF = \frac{uy}{z}$. & MP.

(y). PF ou $PA+AF$ $(x+\frac{uy}{z})$ :: $NQ(z)$. QF ou $QA+AF$ $(u+\frac{uy}{z})$. D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy+\frac{uyy}{z}=xz+uy$; & effaçant de part & d'autre uy, & multipliant par z, il vient $uyy=xzz$, qui se reduit à cette proportion $AP(x)$. $AQ(u)$ :: $\overline{MP}^2(yy)$. $\overline{NQ}^2(zz)$. Or par la construction, le quarré de AL ou de PM, est égal au rectangle de la partie AP du diametre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre AP; & par consequent QN en sera * une autre. Ainsi le point N sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre AP: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies LE, AF, les parties égales LE, EE, &c. AF, FF, &c. de l'autre côté des points L, A.

* Art. 19. & 21.

* Art. 8. & 20.

Si au lieu du parametre du diametre AP que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points M de la parabole; ce qui arrive souvent: il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indéfinie LE, au diametre AP, & achever le reste comme cy-dessus.



LIVRE SECOND.

De l'Ellipse.

DÉFINITIONS.

1.

AYANT attaché ſur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la diſtance *Ff* ſoit moindre que la longueur du fil, on ſe ſervira d'un ſtile *M*, pour tenir ce fil toûjours tendu ; & conduiſant ce ſtile autour de ces deux points, en ſorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce ſtile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui ſera nommée *Ellipſe*. FIG. 16.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premier Axe *Aa*, eſt nommé le *Centre* de l'Ellipſe.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *ſecond* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, ſont appellez enſemble, *Conjugués* : de ſorte que le premier Axe *Aa*, eſt dit conjugué au ſecond *Bb* ; & réciproquement le ſecond *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* de l'Ellipſe parallelement à l'un des Axes, & terminées par

l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe: ainsi MP est Ordonnée à l'Axe Aa, & MK à l'Axe Bb.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux Axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier Axe Aa, est au second Axe Bb, de même le second Bb, à une troisiéme proportionnelle p; cette ligne p sera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui passent par le centre C, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse, sont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipse qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

FIG. 17. 31. Si l'on conçoit que les deux foyers F, f, & le centre C se réünissent en un seul point; il est visible que l'Ellipse se changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite CM, égale à la moitié de la corde CMC, attachée par ces deux bouts au point C, qui en sera le centre. On pourra donc considérer un cercle comme une espece particuliére d'Ellipse, dans laquelle la distance des foyers est nulle; de sorte que tout ce qu'on démontrera dans la suite de l'Ellipse, telle que puisse être la distance de ces deux foyers, se peut aussi appliquer au cercle, en supposant que cette distance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

FIG. 16. 32. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque M de l'Ellipse, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf; leur somme sera toûjours la même.

COROLLAIRE II.

33. Lorsque le point M tombe en A, il est visible que MF devient AF, & que Mf devient Af: de même lorsque le point M tombe en a, il est encore visible que MF devient aF, & que Mf devient af. On aura donc $AF + Af$, ou $2AF + Ff = aF + af$, ou $2af + fF$; & partant $AF = af$. D'où il suit :

1°. Que la somme des deux droites MF, Mf, est toûjours égale au premier axe Aa, puisque $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.

2°. Que la distance Ff des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre C, puisque $CA - AF$ ou $CF = Ca - af$ ou Cf.

COROLLAIRE III.

34. Si de l'extremité B du second axe Bb, l'on mene aux deux foyers F, f, les droites BF, Bf; il est clair que les triangles réctangles BCF, BCf, seront égaux ; & qu'ainsi l'hypothenuse BF, est égale à l'autre hypothenuse Bf: & par consequent BF, ou $Bf = CA$ ou Ca, puisque * $BF + Bf = Aa$. On prouve de même que Fb ou $bf = CA$ ou Ca. D'où l'on voit : * Art. 33.

1°. Que le second axe Bb, est divisé en deux parties égales par le centre C; car les triangles réctangles FCB, FCb seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales FB, Fb, & le côté FC commun.

2°. Que le second axe Bb, est toûjours moindre que le premier Aa; puisque sa moitié BC étant l'un des côtez du triangle réctangle BCF, sera moindre que son hypothenuse BF, qui est égale à la moitié CA du premier axe Aa.

3°. Que si l'on décrit de l'une des extremitez B du petit ou second axe Bb comme centre, & du rayon BF égal à CA, moitié du premier ou grand axe Aa, un cercle ; il coupera ce grand axe en deux points F, f, qui seront les deux foyers de l'Ellipse.

COROLLAIRE IV.

35. Les mêmes chôses étant posées, si l'on nomme *CA* ou *BF*, *t*; *CF*, *m*; le triangle réctangle *BCF*, donnera $\overline{BC}^2 = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF \times Fa = tt - mm$. D'où il est évident que le quarré de la moitié *CB* du petit axe *Bb*, est égal au réctangle de *AF* par *Fa* parties du grand axe *Aa*, prises entre l'un des foyers *F*, & ses deux extremités *A*, *a*.

COROLLAIRE V.

36. Il sera facile à present de décrire une Ellipse dont les deux axes *Aa*, *Bb*, sont donnez. Car ayant trouvé* sur le premier ou grand axe *Aa*, les foyers *F*, *f*, on attachera dans ces points, les extremités d'un fil *FMf*, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipse comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elle sera celle qu'on demande.

* Art. 34.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 16. 37. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier ou grand axe* Aa, *& qu'on prenne sur cet axe la partie* AD *égale à* MF; *Je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé, comme auparavant, les données *CA*, *t*; *CF*, *m*; & de plus les indeterminées *CP*, *x*; *PM*, *y*; & l'inconnuë *CD*, *z*; il peut arriver deux differens cas.

Premier cas. Lorsque le point *P* tombe au dessus du centre *C*. Comme *PF* est toûjours moindre que *Pf*; il s'ensuit que *MF* ou *AD* sera moindre que *Mf* ou *aD*; c'est pourquoi *AD* ou $MF = t - z$, *aD* ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ (selon que le point *P* tombe au dessous ou au dessus du foyer *F*), $Pf = x + m$. Or les triangles réctangles *MPF*, *MPf*, donnent $tt -$

$2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$, & $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$.

Second cas. Lorsque le point P tombe au dessous du centre C, comme PF est toûjours plus grande que Pf, il s'ensuit que MF ou AD, sera plus grande que Mf ou aD: c'est pourquoi AD ou $MF = t + z$, aD ou $Mf = t - z$, $PF = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer f). Or les triangles réctangles MPF, MPf, donnent $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$, & $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire encore $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Par conséquent en l'un & l'autre cas, on aura $CA\ (t)$. $CF(m) :: CP\ (x)$. $CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE

38. Il est donc évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toûjours $MF = t - \frac{mx}{t}$, & $Mf = t + \frac{mx}{t}$, lorsque le point P tombe au dessus du centre C: & qu'au contraire on aura $MF = t + \frac{mx}{t}$, & $Mf = t - \frac{mx}{t}$, lorsqu'il tombe au dessous.

PROPOSITION II.

Theorême.

39. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré de l'axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans l'article précedent, si l'on met dans l'egalité $tt \pm 2tz + zz = yy + mm \pm 2mx + xx$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle-ci $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{BC}^2 (tt - mm) . \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il fal. &c.*

* Art. 37.
* Art. 35.

COROLLAIRE I.

40. SI l'on mene une ordonnée MK à l'autre axe Bb, lequel j'appelle $2c$, il est clair que $MK = CP (x)$, & que $CK = PM (y)$. Or * $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt - 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2 (xx) . BK \times Kb (cc - yy) :: \overline{Aa}^2 (4tt) . \overline{Bb}^2 (4cc)$.

* Art. 39.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK à l'axe Bb, est au rectangle de BK par Kb parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué Aa, est au quarré de l'axe Bb.

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

FIG. 18. 19.

41. SI l'on nomme l'un ou l'autre axe Aa, $2t$; son conjugué Bb, $2c$; son parametre p; chacune de ses ordonnées PM, y; chacune de ses parties CP prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura * toûjours $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt) :: p . Aa (2t)$. Puisque selon la définition du Parametre, $Aa (2t) . Bb (2c) :: Bb (2c) . p = \frac{4cc}{2t}$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion $yy . tt - xx :: 4cc . 4tt$, & ensuite

* Art. 39.

ensuite de l'autre $yy. tt - xx :: p. 2t$. L'on tire $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, & $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{pxx}{2t}$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points de l'Ellipse, & qu'elle en détermine la position par rapport aux deux axes conjugués Aa, Bb; il s'ensuit que l'équation $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, ou $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{pxx}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipse par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

42. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ, à l'axe Aa; leurs quarrés seront entr'eux comme les réctangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car* $\overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{QN}^2 . AQ \times Qa$. Et partant $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: AP \times Pa . AQ \times Qa$. * Art. 39.

COROLLAIRE IV.

43. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un des axes conjugués Aa, une parallele MM à l'autre axe Bb; elle rencontrera l'Ellipse en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, soient à l'Ellipse, il faut* que les quarrés de PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa, soient égaux chacun à la même quantité $cc - \frac{ccxx}{tt}$. * Art. 41.

COROLLAIRE V.

44. Il suit de ce que* $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que plus CP (x) prise de part & d'autre du centre C augmente, plus chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe Aa, diminuë; de sorte que CP (x) étant égale à CA ou Ca (t), chaque PM (y) devient alors nulle ou zero: & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise * Art 41.

de part & d'autre de l'axe Aa augmente; de sorte que CP (x) devenant zero, chaque PM (y), qui eſt alors CB ou Cb (c), ſera la plus grande des ordonnées. D'où il eſt clair.

1°. Que ſi l'on mene par les extremités B, b, de l'un des axes conjugués, des paralleles à l'autre; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipſe s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe Aa, en commençant par l'extremité A, juſqu'à ce qu'elle rencontre ſon conjugué Bb; aprés quoi elle va toujours en s'approchant du même axe Aa, juſqu'à ce qu'elle le rencontre en ſon autre extremité a.

COROLLAIRE VI.

* *Art.* 41. 45. Il ſuit encore de ce que* $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C; les ordonnées PM, PM, ſeront égales. D'où il eſt évident que ſi une ligne quelconque MM, terminée par l'Ellipſe, eſt coupée en deux également par l'un des axes conjugués Bb en un point K autre que le centre; elle ſera parallele à l'autre Aa. Car menant les paralleles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP ſera diviſée par le milieu en C, puiſque MM l'eſt en K; & partant les ordonnées PM, PM ſeront égales. La droite MM ſera donc parallele à l'axe Aa.

COROLLAIRE VII.

46. Si l'on conçoit que le plan ſur lequel l'Ellipſe eſt tracée, ſoit plié le long d'un des axes Bb, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent; il eſt clair que les deux demi-Ellipſes BAb, Bab, tomberont éxactement l'une ſur l'autre; ſçavoir, les points A, M, &c. ſur a, M, &c. puiſque* toutes les perpendiculaires Aa, MM, &c. à cet axe, * *Art.* 45. ſont coupées par le milieu aux points C, K, &c. D'où il eſt viſible que l'Ellipſe eſt coupée par les deux axes en qua-

tre portions parfaitement égales & uniformes, qui ne different entr'elles que par leur situation.

PROPOSITION III.

Theorême.

47. *Si l'on mene par l'une des extremités* A *de l'un des axes* Aa, *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un des angles* aAL, aAL, *faits par cet axe, & par la ligne* LAL *parallele à son conjugué* Bb; *je dis qu'elle rencontrera l'Ellipse en un autre point* M. FIG. 10.

Ayant pris sur AL de part ou d'autre du point A, la partie AG égale au parametre p de l'axe Aa, & tiré GF parallele à cet axe, & qui rencontre la ligne AM (prolongée, s'il est necessaire) au point F, ou prendra sur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe Aa, la partie AL égale à GF, & ayant tiré par l'autre extremité a de l'axe Aa la droite aL; je dis que le point M où elle coupe la ligne AM, est à l'Ellipse MAM.

Car menant MP parallele à AL, & nommant les connuës Aa, $2t$; AG, p; GF ou AL, a; & les inconnuës CP, x; PM, y; les triangles semblables AGF, MPA, & LAa, MPa, donneront $AG(p)$ $GF(a)$ :: $MP(y)$. $AP(t \pm x) = \frac{ay}{p}$. Et $AL(a)$. $Aa(2t)$ :: $PM(y)$. aP $(t \mp x) = \frac{2ty}{a}$. Et par consequent on aura toûjours $AP \times Pa$ $(tt - xx) = \frac{2tyy}{p}$, soit que le point P tombe au dessus ou au dessous du centre C; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. La ligne PM sera donc* une ordonnée à l'axe Aa; & partant le point M sera à l'Ellipse MAM. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 41.

COROLLAIRE I.

48. DE-LA on voit comment un axe Aa d'une Ellipse MAM étant donné avec son parametre p, &

ayant mené par l'une des extremités A de cet axe, une ligne droite quelconque AM dans l'un ou l'autre des angles aAL, aAL, faits par cet axe, & par la ligne LAL parallele à ſon conjugué Bb; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver ſur cette ligne le point M où elle rencontre l'Ellipſe MAM.

COROLLAIRE II.

49. Il eſt évident qu'il n'y a que la ligne LAL parallele à l'axe Bb, qui puiſſe être tangente de l'Ellipſe MAM au point A, l'une des extremités de ſon conjugué Aa; puiſqu'il n'y a que cette ſeule ligne, qui paſſant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 20. 50. Tous *les diametres comme* MCm, *ſont coupés en deux également par le centre* C, *& ils ne rencontrent l'Ellipſe qu'en deux points* M, m.

Ayant mené l'ordonnée MP, & pris Cp égale à CP, ſi l'on mene la perpendiculaire pm terminée en m par la droite MCm; il eſt évident que les triangles CPM, Cpm ſont ſemblables & égaux, & qu'ainſi CM eſt égale à Cm, & PM à pm. Or comme * les ordonnées qui ſont également éloignées de part & d'autre du centre C, ſont égales entr'elles, & que PM eſt une ordonnée, il s'enſuit que pm ſera auſſi une ordonnée; & par conſequent que le point m eſt à l'Ellipſe.

* *Art.* 45.

De plus il eſt viſible que ſi l'on imagine une parallele à l'axe Bb, qui ſe meuve de C vers A; la partie de cette parallele renfermée dans l'angle ACM, ira toûjours en augmentant à meſure que CP croît, & qu'au contraire la partie de cette parallele renfermée entre le quart d'Ellipſe AMB & l'axe CA, c'eſt à dire, l'ordon-

née PM * ira toûjours en diminuant; d'où il suit que la ligne droite CM, qui passe par le centre, ne rencontre l'Ellipse qu'en un point M du même côté de l'axe; & il en est de même pour le point m pris de l'autre côté. Donc &c. *Art. 44.

DE'FINITIONS.

11.

Si l'on mene par un point quelconque M de l'Ellipse, un diametre MCm, une ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa, & une ligne droite MT, en sorte que CT soit troisiéme proportionnelle à CP, CA; le diametre SCs parallele à MT, est appellé *Diametre conjugué* au diametre Mm; Et réciproquement le diametre Mm est dit conjugué au diametre Ss: de sorte que les deux ensemble sont appellés *Diametres conjugués.* FIG. 21. 22.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipse parallelement à l'un de ces deux diametres, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi NO parallele au diametre Ss, est Ordonnée à son conjugué Mm.

13.

La troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, est appellée *Parametre* du premier de la proportion. Ainsi la troisiéme proportionnelle à Mm, Ss, est appellée *Parametre* du diametre Mm.

COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée CA, t; & les indéterminées CP, x; PT, s; il est clair, selon la définition 11[e] que CT $(x+s) = \frac{tt}{x}$; & qu'ainsi $sx = tt - xx = AP \times Pa$.

PROPOSITION V.

Theorême.

52. Si *l'on mene par les extremités* M, S, *de deux diametres conjugués* Mm, Ss, *deux ordonnées* MP, SK, *à un axe* Aa: *je dis que la partie* CK *de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées* SK, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AP, Pa, *faites par la rencontre de l'autre ordonnée* MP.

Il faut prouver que $\overline{CK}^2 = AP \times Pa$.

Ayant nommé les connuës CA, t; CP, x; PT, s; & l'inconnuë CK, m; on aura $AP \times Pa = tt - xx =$ * sx, & $AK \times Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour tt sa valeur $xx + sx$. Cela posé, la proprieté de l'Ellipse * donnera $AP \times Pa\,(sx)$. $AK \times Ka\,(sx + xx - mm)$ :: $\overline{PM}^2$. $\overline{KS}^2$ :: $\overline{TP}^2\,(ss)$. $\overline{CK}^2\,(mm)$. à cause des triangles semblables TPM, CKS. D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire, $\overline{CK}^2\,(mm) = \frac{sxx + ssx}{x + s} = sx = AP \times Pa$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 51.
* Art. 42.

COROLLAIRE.

53. Puisque $\overline{CK}^2 = tt - xx$, il s'ensuit que $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2$ ou $AK \times Ka = xx$. Or * $\overline{CA}^2\,(tt)$. $\overline{CB}^2\,(cc)$ :: $AK \times Ka\,(xx)$. $\overline{SK}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Et $\overline{CA}^2\,(tt)$. $\overline{CB}^2\,(cc)$ :: $AP \times Pa\,(tt - xx)$. $\overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. De plus à cause des triangles réctangles CPM, CKS, on aura le quarré $\overline{CM}^2$ ou $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, & le quarré $\overline{CS}^2$ ou $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Donc $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$.

* Art. 41.

C'est à dire que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, est égale à la somme des quarrés des deux axes Aa, Bb.

PROPOSITION VI.

Theorême.

54. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* Mm, *est au rectangle de* MO×Om *fait des parties de ce diametre ; comme le quarré de son conjugué* Ss, *est au quarré du même diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené les paralleles NQ, OH, à l'axe Bb, & la parallele OR à son conjugué Aa, qui rencontre au point R l'ordonnée NQ prolongée, s'il est necessaire ; on nommera les données CP, x ; PM, y ; CA, t ; PT, s ; & les indéterminées HQ ou OR, a ; CH, b ; & on aura à cause des triangles semblables CPM, CHO, & MPT, NRO, ces deux proportions $CP\ (x) . PM\ (y) :: CH\ (b) . HO$ ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et $TP\ (s) . PM\ (y) :: OR\ (a) . RN = \frac{ay}{s}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 21.) NQ est toûjours la difference de $RQ\ (\frac{by}{x})$, $RN\ (\frac{ay}{s})$, & CQ la somme de $CH\ (b)$, $HQ\ (a)$, lorsque le point N tombe entre les points M, S, ou m, s ; & qu'au contraire (*fig.* 22.) NQ est toûjours la somme de RQ, RN, & CQ la difference de CH, HQ, lorsque le point N tombe par tout ailleurs : on aura $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, & $\overline{CQ}^2 = aa \mp 2ab + bb$; sçavoir $-\frac{2abyy}{sx}$ & $+2ab$ dans le premier cas, & au contraire $+\frac{2abyy}{sx}$ & $-2ab$ dans le second cas. Or* $AP \times Pa\ (tt - xx) . AQ \times Qa$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2\ (tt - aa \pm 2ab - bb) :: \overline{PM}^2\ (yy) . \overline{QN}^2 = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. En comparant ensemble ces deux valeurs du quarré de NQ, on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le

*Art. 42.

terme $\pm\frac{2abyy}{sx}$ & de l'autre le terme $\pm\frac{2abyy}{tt-xx}$ qui lui eſt
* *Art.* 51. égal, puiſque * $sx = tt - xx$, & diviſant par yy, il vient $\frac{bb}{xx} + \frac{aa}{ss} = \frac{tt-aa-bb}{tt-xx}$.

Si l'on multiplie par xx, & qu'on tranſpoſe bb, on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^4}{ssxx} = \frac{ttxx-aaxx-bbtt}{tt-xx}$; & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le ſecond par le quarré de $tt-xx$ valeur de sx (ce qui ſe fait en multipliant ſimplement le numerateur par $tt-xx$) on aura $aax^4 = t^4xx - aattxx - bbt^4 - ttx^4 + aax^4 + bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre aax^4, tranſpoſant $aattxx$, & diviſant par $ttxx$, l'on tirera $\overline{HQ}^2$ ou $\overline{OR}^2$ $(aa) = tt - xx + bb - \frac{bbtt}{xx}$.

Maintenant ſi l'on nomme le demi diametre CM ou Cm, z; on aura à cauſe des triangles ſemblables CPM, CHO, cette proportion $CP\,(x).\,CM\,(z) :: CH\,(b).\,CO = \frac{bz}{x}$. Et partant $MO \times Om = zz - \frac{bbzz}{xx}$. Or les triangles ſemblables ORN, CKS, donnent $\overline{ON}^2.\,\overline{CS}^2 :: \overline{OR}^2$
* *Art.* 52. $(tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}).\,\overline{CK}^2$ * $(tt-xx) :: MO \times Om\,(\frac{xxzz-bbzz}{xx}).\,\overline{CM}^2\,(zz)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc $\overline{ON}^2.$
* *Art.* 50. $MO \times Om :: \overline{CS}^2.\,\overline{CM}^2$ * $:: \overline{Ss}^2.\,\overline{Mm}^2$. *Ce qu'il falloit &c.*

COROLLAIRE GENERAL.

55. Il eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la Propoſition ſeconde par rapport aux deux axes Aa, Bb, s'étend par le moyen de cette Propoſition à deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss. Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, ſe tirent de la ſeconde Propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que l'angle ACB ſoit droit ou qu'il ne le ſoit pas; il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles, que les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres

diametres conjugués quelconques, ils seront encore vrais dans cette supposition: car leur démonstration demeurera toûjours la même; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe* celui de *Diametre.*

COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, subsistent avec la même force, lorsque les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, sont deux diametres conjugués quelconques, tels que *Mm*, *Ss*; il s'ensuit que la ligne *MT* menée par le point *M* l'une des extremités d'un diametre quelconque *Mm*, parallelement à son diametre conjugué *Ss*, est tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher l'Ellipse en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une Ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

57. DE-LA il est évident, selon la définition 11e, que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une Ellipse, une ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*; & qu'ayant pris *CT* du côté du point *P*, troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*, on tire la droite *MT*: cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et réciproquement, que si la ligne *MT* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*, les parties *CP*, *CA*, *CT* de cet axe, seront en proportion geométrique continuë.

COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propositions, que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres conjugués quelconques; on verra que ces Propositions seront encore vrayes, puisqu'elles se démontreront de la même maniere qu'auparavant: comme il est évident par l'inspéction de la figure 23, où les triangles

semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne *Aa*, au lieu d'être un axe, est un diametre quelconque. 2°. Que les diametres conjugués *Mm*, *Ss*, peuvent être les deux axes dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder les deux axes comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux des angles droits.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 24. 59. *Si par un point quelconque d'une Ellipse qui a pour centre le point* C, *l'on tire une ordonnée* MP *à l'un des axes* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui passe par le point* M: *je dis que* CP *sera toujours à* PG *en raison donnée de l'axe* Aa *à son parametre.*

Car nommant le demi-axe *CA* ou *Ca*, *t*; & les indéterminées *CP*, *x*; *PM*, *y*; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; & partant $PT = \frac{tt-xx}{x}$. Or les triangles réctangles semblables *TPM*, *MPG*, donnent $TP\ (\frac{tt-xx}{x}) . PM(y) :: PM(y) . PG = \frac{xyy}{tt-xx}$. D'où l'on tire cette proportion $CP\ (x) . PG\ (\frac{xyy}{tt-xx}) :: AP \times Pa\ (tt-xx) . \overline{PM}^2\ (yy)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit xyy. Mais le réctangle $AP \times Pa$, est * au quarré $\overline{PM}^2$, comme l'axe *Aa* est à son parametre. Donc &c.

* Art. 57.

* Art. 41.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 25. 60. *Si l'on mene par un point quelconque* M *d'une Ellipse, une tangente* TMS, *& aux deux foyers* F, f, *les droites* MF,

Mf; je dis que les angles FMT, *f*MS, *faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente* TMS, *sont égaux entr'eux.*

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, sur cette tangente; le premier axe Aa qui la rencontre en T, & l'ordonnée MP à cet axe, & nommé les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura MF* $(t - \frac{mx}{t}) . Mf (t + \frac{mx}{t}) :: TF$, ou CT* *Art. 38. *Art. 37.
$(\frac{tt}{x}) - CF (m) . Tf$ ou $CT (\frac{tt}{x}) + Cf (m)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles semblables TFD, Tfd, donnent $TF . Tf :: FD . fd$. L'hypothenuse MF du triangle réctangle MDF, sera donc à l'hypothenuse Mf du triangle réctangle Mdf, comme le côté DF est au côté df; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Les angles FMD, fMd, ou FMT, fMS, qui sont opposés aux côtés homologues DF, df, seront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

61. DE-LA il est évident que la tangente TMS étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse l'Ellipse toute entiere du côté de ses deux foyers F, f. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de l'Ellipse que tombe le point M, il s'ensuit qu'elle sera concave dans toute son étenduë autour de ses deux foyers, & par consequent aussi autour de son centre.

PROPOSITION IX.

Theorême.

62. S*i l'on mene par l'une des extremités* A *d'un diametre* Aa *une parallele* DAE *à son conjugué* Bb, *laquelle rencontre deux autres diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, FIG. 26.

aux points D, E; *je dis que le rectangle de* DA *par* AE, *est égal au quarré de la moitié* CB *du diametre* Bb.

Il faut prouver que $DA \times AE = \overline{CB}^2$.

Ayant mené par les extremités M, S, des diametres conjugués Mm, Ss, les ordonnées MP, SK, au diametre Aa, on nommera les données CA, t; CB, c; & les
* Art. 52. indéterminées CP, x; PM, y; & on aura * $\overline{CK}^2 = AP \times Pa = tt - xx$; & par consequent $AK \times Ka$ ou $\overline{CA}^2$
* Art. 54. $- \overline{CK}^2 = xx$. Or * $\overline{BC}^2 (cc) . \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{MP}^2 (yy) . AP \times Pa$ ou $\overline{CK}^2 = \frac{tyy}{cc}$. Et $\overline{CA}^2 (tt) . \overline{CB}^2 (cc) :: AK \times Ka (xx) . \overline{KS}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire $CK = \frac{ty}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles semblables CPM, CAD, & CKS, CAE, donnent $CP (x) . PM (y) :: CA (t) . AD = \frac{ty}{x}$. Et $CK \left(\frac{ty}{c}\right) . KS \left(\frac{cx}{t}\right) :: CA (t) . AE = \frac{ccx}{ty}$. Donc $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION X.

Problême.

FIG. 27. 63. **D**EUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés, avec une ligne droite* MCm *qui passe par le centre* C; *marquer sur cette ligne les points* M, m, *où elle rencontre l'Ellipse.*

Ayant mené par l'une des extremités A du diametre Aa, une parallele indéfinie AD, à son conjugué Bb, laquelle rencontre la ligne CM donnée de position au point D; on tirera par le point A perpendiculairement sur AD, la ligne AO égale à CB, & par les points O, D, la ligne OD. On décrira du rayon OA un cercle qui coupera la ligne OD en deux points N, n, par où l'on tirera des paralleles NM, nm, à la ligne OC qui joint

les centres de l'Ellipse & du cercle. Je dis que les points M, m, où elles rencontrent la ligne CD, seront à l'Ellipse, & détermineront par conséquent les extremités du diametre MCm donné de position.

Car menant les paralleles MP, NQ, à AD, qui rencontrent les lignes CA, OA, aux points P, Q; les triangles semblables CDO, MDN, & CDA, CMP, & ODA, ONQ, donneront $CA . CP :: CD . CM :: OD . ON :: OA . OQ$. c'est à dire, $CA . CP :: OA . OQ$. Et partant si l'on mene la droite PQ, elle sera parallele à OC; & par conséquent aussi à MN supposée parallele à OC. Ainsi les paralleles MP, NQ, seront égales entr'elles. Cela posé, si l'on nomme les données CA, t; CB ou AO ou ON, c; & les indéterminées CP, x; PM ou NQ, y; on aura $CA(t) . CP(x) :: OA(c) . OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle OQN réctangle en Q, le quarré $\overline{NQ}^2$ ou $\overline{MP}^2 (yy) = \overline{ON}^2 (cc) - \overline{OQ}^2 (\frac{ccxx}{tt})$. La ligne MP sera donc * une ordonnée au diametre Aa, & par conséquent le point M appartiendra à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les droites Aa, Bb. Mais à cause des paralleles NM, OC, nm, la ligne Mm est divisée en deux également par le centre C; puisque par la proprieté du cercle, Nn l'est au point O. Donc le point m appartiendra * aussi à la même Ellipse.

* *Art.* 41. & 55.

* *Art.* 50.

Si les diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, les paralleles CO, PQ, se confondroient alors avec les lignes CA, AO, qui n'en feroient qu'une seule; ce qui rendroit la construction & la démonstration un peu plus faciles.

PROPOSITION XI.

Problême.

64. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; en trouver les deux axes* Mm, Ss: *& démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.* FIG. 27.

Ayant mené par l'une des extremités A du diametre Aa, une parallele DE à son conjugué Bb, on tirera AO perpendiculaire à DE & égale à CB. Ayant joint OC, on menera par son point de milieu F la ligne FG qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point G la ligne DE, sur laquelle on prendra de part & d'autre du point G les parties GD, GE, égales chacune à GO ou GC. Tirant enfin les droites CD, CE; je dis que les deux axes Mm, Ss, sont situés sur ces droites.

*Art. 58. Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne DE en des points D, E, tels que le cercle décrit de ce diametre passera par les deux points C, O; puisque le rectangle $DA \times AE$ étant égal * au quarré de AO, l'angle DOE sera droit, aussi-bien que l'angle DCE. Or il est évident que c'est précisément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette construction; puisque les lignes GO, GC, GE, GD étant toutes égales entr'elles, sont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir sur la ligne DE que deux points D, E, qui satisfassent en même temps à ces deux conditions; sçavoir, que l'angle DCE & l'angle DOE soient chacun droit; il s'ensuit que les diametres conjugués Mm, Ss, qui font entr'eux un angle droit, seront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

*Art. 62.

Maintenant pour en determiner la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites OD, OE; & par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA, mener les paralleles NM, RS. Car il est évident * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, appartiendront à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb; & qu'ainsi ils seront les extremités de ses axes.

*Art. 63.

COROLLAIRE.

65. Si l'on proposoit de trouver deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui fissent entr'eux un angle *MCS* égal à un angle donné; deux autres diametres conjugués *Aa*, *Bb*, étant donnés. Il est visible que la question se réduiroit à trouver sur la ligne *DE* donnée de position; deux points *D*, *E*, tels que menant aux deux points *O*, *C*, donnés hors cette ligne, les droites *DO*, *OE*, *CD*, *CE*, l'angle *DOE* fût droit, & l'angle *DCE* égal à l'angle donné. Mais comme la solution de ce Problême est assez difficile, on l'a renvoyée dans le 10e Livre, & on a suivi ici une autre voye, qui est plus simple; c'est de trouver d'abord les deux axes, & de s'en servir ensuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enseigner dans la Proposition suivante.

PROPOSITION XII.

Problême.

66. Les *deux axes* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; trouver deux diametres conjugués* Mm, Ss, *qui fassent entr'eux l'angle* MCS *égal à un angle donné.* FIG. 28. 29.

Je suppose que les diametres *Mm*, *Ss*, soient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points *D*, *E*, la ligne droite indéfinie *DE* menée par l'extremité *A* du petit axe *Aa* parallelement au grand *Bb*. Et ayant tiré du centre *C* de l'Ellipse, la ligne *CF*, qui fasse avec *DE* au point *F* l'angle *CFE* égal à l'angle donné *MCS*, je nomme les données *CA*, *t*; *CB*, *c*; *AF*, *a*; & l'inconnuë *AE*, *z*; ce qui donne $AD = ^{*} \frac{cc}{z}$, CE *Art. 62.
$= \sqrt{tt + zz}$ à cause du triangle réctangle *CAE*. Cela posé.

Les triangles *FEC*, *CED*, seront semblables; puisque l'angle au point *E* est commun, & que l'angle *CFE* a

été fait égal à l'angle MCS: c'est pourquoi FE ($z-a$). $EC(\sqrt{tt+zz})::EC(\sqrt{tt+zz}).ED$ ($z+\frac{cc}{z}$). D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zz-az+cc-\frac{acc}{z}=tt+zz$; & effaçant de part & d'autre zz, multipliant ensuite par z, & divisant par a, il vient $zz-\frac{cc}{a}z+\frac{tt}{a}z+cc=o$. Et en faisant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc-tt}{a}=2b$, on changera l'égalité précédente en celle-ci $zz-2bz+cc=o$, ou $zz-2bz+bb=bb-cc$; ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $z-b$ ou $b-z=\sqrt{bb-cc}$, & par conséquent l'inconnuë AE (z) $=b\pm\sqrt{bb-cc}$. Voici maintenant la construction que cette derniere égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe Aa jusqu'au point O, en sorte que AO soit égale à la moitié CB du grand; soit tirée CF, qui fasse avec DE menée par le point A parallelement à Bb, l'angle CFE égal à l'angle donné. Ayant joint OF, soient tirées les droites OH, CG, perpendiculaires sur OF, CF, qui rencontrent DE aux points H, G (on n'a point marqué dans les figures 28 & 29, les points H, G, sur la ligne DE; parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il est facile de les y imaginer). Soit décrit du centre O, & du rayon OK, égal à la moitié de GH, partie de AD prolongée, comprise entre G & H, un arc de cercle qui coupe DE aux points K, K; & ayant pris sur DE les parties KD, KE, égales chacune à KO, soient tirées par le centre C de l'Ellipse, les droites DC, EC. Je dis que les diametres cherchés Mm, Ss, sont situés sur ces lignes.

Car à cause des angles droits FAC, FCG, & FAO, FOH; on aura $AG=\frac{tt}{a}$, $AH=\frac{cc}{a}$; & partant $GH=\frac{cc-tt}{a}=2b$. Le rayon OK qui est égal à la moitié de HG, sera donc égal à b; & à cause du triangle réctan-

gle

gle OAK, on aura $AK = \sqrt{bb-cc}$, & AE ou $KE \mp AK = b \mp \sqrt{bb-cc}$, & AD ou $KD \pm AK = b \pm \sqrt{bb-cc}$. Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de AE par celle de AD, il vient $AE \times AD = cc = \overline{CB}^2$; & partant * les diametres Mm, Ss, sont conjugués. Mais le rectangle de $AE + AD$ ou $DE (2b)$ par $AE - AF$ ou $EF (b \mp \sqrt{bb-cc} - a)$ est $= 2bb \mp 2b\sqrt{bb-cc} - 2ab = 2bb \mp 2b\sqrt{bb-cc} + tt - cc$ en mettant pour $2ab$ sa valeur $cc - tt$; & à cause du triangle rectangle CAE le quarré $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CA}^2 = 2bb \mp 2b\sqrt{bb-cc} + tt - cc = DE \times EF$: ce qui donne $FE . EC :: EC . ED$. Et partant les triangles FEC, CED, seront semblables; puisqu'ils ont l'angle au point E commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle MCS sera donc égal à l'angle donné CFE. C'est ce qui restoit à démontrer. * Art. 62.

Maintenant pour avoir la grandeur CM, CS, des deux demi-diametres cherchés; il n'y a qu'à tirer les lignes OD, OE, & mener par les points N, R, où elles rencontre le cercle qui a pour rayon OA, les paralleles NM, RS, à OC. Car il est visible * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités de ces diametres. * Art. 63.

COROLLAIRE I.

67. Il suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problême soit possible, il faut que $OK \left(\frac{cc-tt}{2a}\right)$ surpasse ou soit égale à AO (c); car autrement le cercle décrit du rayon OK, ne rencontreroit la ligne DE en aucun point, ce qui est neanmoins necessaire pour la construction.

2°. Que lorsque OK surpasse OA, on trouve toûjours par le moyen des deux points K, K, deux differens diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont également : mais qu'alors le diametre Ss de la figure 29 est égal au diametre Mm de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa; parce que AE de la figure

29. est égal à AD de la figure 28. Et de même que le diametre Mm de la figure 29. est égal au diametre Ss de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa; parce que AD de la figure 29. est égal à AE de la figure 28. C'est à dire que les deux differens diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont également au Problême, sont semblablement posés de part & d'autre de l'axe Aa, & que dans ces deux differentes positions leurs grandeurs demeurent la même.

FIG. 30. 3°. Que lorsque $OK = OA$, les deux points d'intersection K, K, se réünissent au point touchant A; & qu'ainsi il n'y a alors qu'à prendre les parties AE, AD, égales chacune à la moitié CB du grand axe: d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une solution, & que les deux diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

FIG. 28. 29. & 30. 68. Il est clair aussi que plus AF (a) est grande, plus l'angle obtus donné CFE l'est aussi, & plus au contraire la ligne OK ($\frac{cc-tt}{2a}$) diminuë: de sorte que AF étant la plus grande qu'il est possible, l'angle obtus CFE, sera aussi le plus grand; & au contraire la ligne OK, sera la moindre, c'est à dire, égale à AO. Or si l'on mene alors

FIG. [illegible] les droites Ba, ab; les triangles rectangles aCB, CAD, aCb, CAE, seront tous égaux entr'eux; puisque les lignes, AE, AD, sont égales chacune à la moitié CB ou Cb de l'axe Bb, & que CA est égal à Ca. L'angle ACM, sera donc égal à l'angle CaB, & l'angle ACS à l'angle Cab; & partant l'angle donné MCS ou CFE, sera aussi égal à l'angle Bab. D'où l'on voit:

FIG. 28. 29. & 30. 1°. Que si l'on mene de l'une des extremités a du petit axe Aa aux extremités B, b, du grand, les lignes aB, ab; l'angle obtus donné CFE, doit être égal ou moindre que l'angle Bab, afin que * le Problême soit possible.

* Art. 67.

2°. Que lorsqu'il lui est égal, comme dans la figure 30.

il n'y a que deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28. & 29. il y a toûjours deux differens diametres conjugués qui satisfont également; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux; & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux differentes positions.

PROPOSITION XIII.

Problême.

69. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; la décrire par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite selon l'article 36. * *Art. 64.*

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une perpendiculaire *AH* sur l'autre *Bb*, on prendra sur cette ligne la partie *AQ* de part ou d'autre du point *A* égale à *CB*. Et aïant tiré la ligne *CQ*, on fera glisser la ligne *GF* égale à *HQ* par ses extremités le long des lignes *Bb*, *CQ* (prolongées de part & d'autre du centre *C* autant qu'il sera necessaire) jusqu'à ce qu'aprés avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend *GM* égal à *AQ*, le point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise. FIG. 31. & 32.

Car menant *GP* parallele à *QH*, qui rencontre en *P* le diametre *Aa*, & en *O* le diametre *Bb*; les triangles semblables *CHQ*, *COG*, & *CAQ*, *CPG*, donneront *CQ*. *CG* :: *AQ* ou *GM*. *GP* :: *HQ* ou *GF*. *GO*. Et par consequent la ligne *PM* sera parallele au diametre *Bb*. Cela posé.

Si l'on nomme les données CA, t; AQ ou CB ou Cb, c; & les inconnuës CP, x; PM, y; on aura CA (t) CP (x) :: AQ (c). $GP = \frac{cx}{t}$. Et le triangle réctangle GPM donnera $\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GP}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre Aa dans l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb. Donc &c.

*Art. 41. & 55.

Si les deux diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, il est clair que les lignes AQ, CQ, tomberoient sur le diametre Aa qui seroit l'un des axes, & que le point H tomberoit sur le centre C. D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors GF égale à CQ, somme ou difference des deux demi-axes CA, CB; & la faire glisser par ses extremités le long des axes Aa, Bb, prolongés s'il est necessaire.

Fig. 33.

Comme les lignes Aa, Bb, s'entrecoupent à angles droits au point C; il est clair qu'en quelque situation que se trouve la droite GF pendant qu'elle glisse le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diametre, passeroit toûjours par le point C; & qu'ainsi la ligne CD qui passe par le point D milieu de FG, sera toûjours égale à DF, puisque les lignes CD, DF, DG, seront toûjours des raïons de ce cercle. Delà naît la description suivante.

Soient deux lignes droites CD, DF, égales chacune à la moitié de CQ, somme ou difference des deux demi-axes CB, CA; attachées l'une à l'autre par leur extremité commune D, en sorte qu'elles se puissent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de sa tête. Soit attachée l'extremité C de la droite CD dans le centre de l'Ellipse; & soit entenduë l'extremité F de l'autre droite FD, se mouvoir le long de l'axe Bb, en entraînant avec elle la ligne DC mobile autour du point fixe C. Il est clair que si l'on prend sur FD (prolongée, s'il est necessaire) la partie FM égale à CA, le

point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problême.

70. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une parallele indéfinie *DAD* à son conjugué *Bb*, on tirera *AO* perpendiculaire à *AD*, & égale à la moitié *CB* du diametre *Bb* ; on joindra *OC* ; & on décrira un cercle du centre *O*, & du raïon *OA*. Cela fait on menera librement de part & d'autre de *CA*, autant de lignes *CD, CD*, &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points *D, D*, &c. où elles rencontrent la ligne *DAD*, au centre *O*, les lignes *DO, DO* &c. qui coupent la circonference du cercle aux points *N, N*, &c. on menera des droites *NM, NM*, &c. paralleles à *OC*, lesquelles rencontrent aux points *M, M*, &c. les droites correspondantes *CD, CD*, &c. sur lesquelles on marquera de l'autre côté du centre *C* des points *m, m* &c. qui en soient également éloignés. Il est évident * que la ligne courbe qui passera par tous les points *M, M*, &c ; *m, m*, &c. ainsi trouvés, aura pour diametres conjugués les droites *Aa, Bb*. FIG. 34.

* Art. 65.

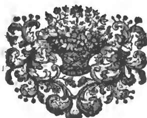
SECONDE MANIERE.

Ayant pris sur l'un des demi-diametres *CB*, de petites parties *CE, EE*, &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diametre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires *ED, ED*, &c, qui rencontrent la circonference circulaire décrite du centre *C* & du raïon *CB*, aux points *D, D*, &c. Ayant joint *AB*, on tirera par celui des points *E*, qui est le plus proche du centre *C*, la ligne *EP* parallele à *AB*, FIG. 35.

qui rencontre *CA* au point *P*. On prendra ſur le diametre *Aa* de part & d'autre du centre *C*, autant de parties *PP*, *PP*, &c. égales à *CP*, qu'il en pourra contenir; & on menera par tous les points *P*, *P*, &c. des paralleles *MPM*, *MPM*, &c. au diametre *Bb*, ſur chacune deſquelles on prendra de part & d'autre du point *P*, des parties *PM*, *PM*, égales chacune à ſa correſpondante *ED*. Je dis que la ligne courbe qui paſſe par tous ces points *M*, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

Car nommant les données *CA*, t; *CB* ou *CD*, c; & les indéterminées *CP*, x; *PM*, y; on aura à cauſe des triangles ſemblables *CAB*, *CPE*, cette proportion $CA\ (t) . CB\ (c) :: CP\ (x) . CE = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle *CED* réctangle en *E*, le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2\ (yy) = \overline{CD}^2\ (cc) - \overline{CE}^2\ (\frac{ccxx}{tt})$. La ligne *PM* ſera donc * une ordonnée au diametre *Aa*. Et comme cette démonſtration convient à toutes les lignes *PM*; puiſque chaque *CP* eſt toûjours à ſa correſpondante *CE*, en raiſon de *CA* à *CB*: il s'enſuit que la Courbe qui paſſe par tous les points *M* trouvés comme cy-deſſus, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

* Art. 41. & 55.



LIVRE TROISIEME

De l'Hyperbole.

DEFINITIONS.

I.

AYANT attaché sur un plan en un point *f* l'une des extremités d'une longue regle *fMO*, en sorte qu'elle puisse tourner librement autour de ce point fixe *f*, comme centre ; on attachera à son autre extremité *O*, le bout d'un fil *OMF*, dont la longueur doit être moindre que celle de la regle, & duquel l'autre bout sera attaché en un autre point *F*, pris aussi sur ce plan. Maintenant, si l'on fait tourner la regle *fMO* autour du point fixe *f*, & qu'en même temps l'on se serve d'un stile *M* pour tenir le fil *OMF*, toujours également tendu, & sa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le bord de la regle: la ligne courbe *AX* décrite dans ce mouvement, est une portion d'*Hyperbole*. FIG. 36.

Si l'on renverse la regle de l'autre côté du point *F*, on décrira de la même sorte l'autre portion *AZ* de la même Hyperbole.

Mais, si sans changer la longueur de la regle, ni celle du fil, on attache l'extremité de la regle en *F*, & celle du fil en *f*, on décrira en la même sorte une autre ligne courbe *xaz* opposée à la premiere *XAZ*, qui est encore appellée *Hyperbole*, & les deux ensemble sont nommées *Hyperboles opposées*.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, sont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui passe par les deux foyers *F*, *f*, & qui est terminée de part & d'autre par les Hyperboles opposées, est appellée le *premier Axe*.

4.

Le point *C*, qui divise par le milieu le premier axe *Aa*, est nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mene par le centre *C* une perpendiculaire indéfinie *Bb* au premier axe *Aa*; & que du point *A*, comme centre, & de l'intervalle *CF*, on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points *B*, *b*: la partie *Bb* de cette perpendiculaire, est appellée le *second Axe*.

6.

Les deux axes *Aa*, *Bb*, sont appellés ensemble *Conjugués*; de sorte que le premier axe *Aa*, est dit *Conjugué* au second *Bb*; & reciproquement le second *Bb*, *Conjugué* au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* des Hyperboles opposées parallelement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainsi *MP* est *Ordonnée* au premier axe *Aa*, & *MK* au second *Bb*.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier axe *Aa*, est au second axe *Bb*, de même le second axe *Bb*, à une troisiéme proportionnelle *p*; cette ligne *p* sera le Parametre du premier axe *Aa*.

9.

Toutes les lignes qui passent par le centre *C*, sont appellées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles opposées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongées à l'infini, *seconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

REMARQUE.

71. On a dit dans la premiere définition que la longueur du fil *FMO* doit être moindre ou plus grande que celle de la regle *fMO*; dont la raison est que s'il étoit égal à cette regle, le stile *M* décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points *M* seroient également distants des deux points *F*, *f*; puisque retranchant du fil & de la regle, la partie commune *MO*, les restes *MF*, *Mf*, seroient toûjours égaux entr'eux. D'où il est visible que cette ligne ne seroit autre qu'une ligne droite indéfinie *Bb*, menée perpendiculairement à la droite *Ff* par son point de milieu *C*. FIG. 37.

COROLLAIRE I.

72. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque *M*, de l'une des Hyperboles opposées, aux deux foyers *F*, *f*, les droites *MF*, *Mf*; leur difference sera toûjours la même. Car elle sera toûjours égale à la difference qui se trouve entre la longueur de la regle & celle du fil. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

73. Lorsque le point *M* tombe en *A*, il est visible que *MF* devient *AF*, & que *Mf* devient *Af*; & de même, lorsque le point *M* tombe en *a*, en décrivant l'Hyperbole opposée *xaz*; il est encore visible que *MF* devient *aF*, & que *Mf* devient *af*. Donc puisque la difference de ces deux droites est par tout la même, on aura $Af - AF$ ou $Ff - 2AF = aF - af$ ou $Ff - 2af$; & partant $AF = af$. D'où il suit :

1°. Que la distance *Ff* des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre *C*; puisque $CA + AF$ ou $CF = Ca + af$ ou *Cf*.

2°. Que la difference des deux droites *MF*, *Mf*, est toûjours égale au premier axe *Aa*; puisque dans l'Hyperbole *XAZ*, on a toûjours $Mf - MF = Af - AF$ ou

$Af-af$; & que dans son opposée xaz, on a aussi toûjours $MF-Mf=aF-af$ ou $aF-AF$.

COROLLAIRE III.

74. Il suit de la définition cinquiéme.

1°. Que le second axe Bb, est divisé en deux parties égales par le centre C; car les triangles réctangles ACB, ACb, seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales AB, Ab, & le côté AC commun.

2°. Que si l'on prend sur le second axe Bb, la partie CE égale à la moitié CA du premier, & qu'on tire l'hypothenuse AE: le second axe Bb sera plus grand, égal, ou moindre que le premier Aa; selon que la droite CF, est plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse AE; parce que l'hypothenuse Ab, prise égale à CF, se trouvera aussi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse AE.

3°. Que si l'on prend sur le premier axe Aa de part & d'autre du centre C, les parties CF, cf, égales chacune à l'hypothenuse AB du triangle réctangle CAB, formé par les deux demi-axes CA, CB: les points F, f, seront les deux foyers.

COROLLAIRE IV.

75. Les mêmes choses étant posées, si l'on nomme CF ou AB, m; CA, ou Ca, t; le triangle réctangle ACB, donnera $\overline{BC}^2=mm-tt$. Or $AF=m-t$, & $Fa=m+t$; & partant $AF\times Fa=mm-tt$. D'où il est évident que le quarré de la moitié CB du second axe Bb, est égal au réctangle de AF par Fa parties du premier axe Aa, prises entre l'un des foyers F, & ses deux extremités A, a.

COROLLAIRE V.

76. Il sera maintenant facile de décrire les Hyperboles opposées dont les deux axes Aa, Bb, sont donnés, & dont l'on sçait que l'axe Aa doit être le premier. Car

ayant trouvé * sur le premier axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans le point F, le bout d'un fil FMO, duquel l'autre bout O, sera lié à l'extremité d'une longue regle OMf, mobile sur son autre extremité f autour du foyer f, & dont la longueur OMf doit * être moindre ou plus grande que la longueur du fil OMF, de la ligne Aa. Ayant ensuite décrit par le moyen de cette regle & de ce fil, deux Hyperboles opposées XAZ, xaz, comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne Aa, & pour second, la ligne Bb. Et c'est ce qu'on demandoit.

* Art. 74.

* Art. 71.

Plus la regle OMf sera longue, & plus les portions des Hyperboles opposées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, seront grandes; de sorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

PROPOSITION I.

Theorême.

77. Si *l'on mene l'ordonnée* MP *au premier axe* Aa, *& qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie* AD *égale à* MF, *du côté du foyer* F, *lorsque le point* M *tombe sur l'Hyperbole* XAZ, *& du côté du foyer* f *lorsqu'il tombe sur son opposée* xaz; *je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca, t; CF, ou Cf, m; & de plus les indéterminées CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$: & dans le second cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ selon que le point P tombe au dessus ou au dessous du foyer f.

Cela posé, le triangle réctangle MPF donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; sçavoir, — dans le premier

cas, $+$ dans le second; & l'autre triangle réctangle MPf donnera $zz \pm 2tz + tt = yy + xx \pm 2mx + mm$; sçavoir, $+$ dans le premier, & $-$ dans le second.

Maintenant, si l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la seconde; & au contraire dans le second cas, chaque membre de la seconde de ceux de la premiere, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA\ (t).\ CF\ (m) :: CP\ (x).\ CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit &c.*

COROLLAIRE.

78. Il est évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toûjours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorsque le point M tombe sur l'Hyperbole XAZ, qui a pour foyer le point F: & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorsque le point M tombe sur son opposée xaz, qui a pour foyer le point f.

PROPOSITION II.

Theorême.

79. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* PM, *au premier axe* Aa, *est au réctangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe prolongé, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré du premier axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2.\ AP \times Pa :: \overline{Bb}^2.\ \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans la Proposition précédente, si l'on met dans l'équation $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ que l'on a trouvée* par le moyen du triangle réctangle MPF, à la place de z, sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle-cy $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2\ (yy).\ AP \times Pa\ (xx - tt) ::$

* Art. 77.

$\overline{BC}^2$ * $(mm-tt)$. $\overline{CA}^2$ (tt) :: $\overline{Bb}^2$. $\overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 75.

COROLLAIRE I.

80. Si l'on mene une ordonnée MK au second axe Bb, lequel j'appelle $2c$; il est clair que $MK = CP$ (x), & que $CK = PM$ (y). Or $\overline{PM}^2$ (yy). $AP \times Pa$ $(xx-tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt + 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2$ (xx). $\overline{CK}^2 + \overline{CB}^2$ $(yy+cc)$ :: $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK au second axe Bb, est au quarré de CK, joint au quarré de CB moitié du second axe Bb, comme le quarré de son conjugué Aa, est au quarré de ce second axe Bb.

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe Aa, $2t$; son conjugué Bb, $2c$; son parametre p; chacune de ses ordonnées PM, y; & chacune de ses parties CP, prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura toûjours * $\overline{PM}^2$ (yy). $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(xx \mp tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$ :: p. Aa $(2t)$. puisque selon la définition du parametre Aa $(2t)$. Bb $(2c)$ :: Bb $(2c)$. $p = \frac{4cc}{2t}$. où l'on doit observer que c'est le signe $-$ lorsque l'axe Aa est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, le réctangle $AP \times Pa$ qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe $+$ lorsque l'axe Aa est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiére proportion yy. $xx \mp tt$ :: $4cc$. $4tt$. ensuite de l'autre yy. $xx \mp tt$ :: p. $2t$. l'on tire $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, & $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en FIG. 38. & 39. *Art. 79. & 80.

détermine la position par rapport aux axes; il s'ensuit que l'équation $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, ou $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$, en exprime parfaitement la nature par raport à ses axes.

COROLLAIRE III.

82. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe Aa, il est clair que $\overline{MP}^2 . \overline{QN}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Car $\overline{PM}^2 . \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{QN}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Donc &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2$, les réctangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ qui leur sont égaux; ce qu'il faut toûjours observer dans la suite.

COROLLAIRE IV.

83. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un ou de l'autre axe Aa (prolongé lorsque c'est le premier) une parallele MPM à son conjugué Bb; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, soient à une Hyperbole ou aux Hyperboles opposées, il faut * que les quarrés de PM (y) pris de part & d'autre de l'axe Aa, soient égaux chacun à la même quantité $\frac{ccxx}{tt} \mp cc$.

* Art. 81.

COROLLAIRE V.

FIG. 38. & 39. 84. Il suit de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que plus CP (x) prise de part ou d'autre du centre C, devient grande, plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa, augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi PM (y) diminuë; de sorte que (*fig.* 38.) CP (x) étant égale à CA ou Ca (t) lorsque l'axe Aa, est le premier,

PM (y) devient alors nulle ou zero; & que (*fig.* 39.) CP (x) étant nulle ou zero, lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, chaque PM (y) qui devient alors CB ou Cb (c), eſt la moindre de toutes les ordonnées PM (y) priſes de part & d'autre du centre. D'où il eſt clair :

1°. Que ſi l'on mene (*fig.* 39.) par les extremités B, b, du premier axe Bb, des paralleles au ſecond Aa; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles oppoſées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extremités du premier : avec cette difference neanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles oppoſées en un point, & qu'étant prolongé il paſſe au dedans; au lieu que le ſecond tombe tout entier entre les Hyperboles oppoſées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

COROLLAIRE VI.

85. IL ſuit encore de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C, les ordonnées PM, PM, ſeront égales. D'où il eſt clair que ſi une ligne droite MM, terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, eſt coupée en deux également par un axe Bb en un point K autre que le centre, elle ſera parallele à ſon conjugué Aa. Car menant des paralleles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP, ſera coupée par le milieu en C, puiſque MM l'eſt en K; & partant les ordonnées PM, PM, ſeront égales. La droite MM ſera donc parallele à l'axe Aa.

COROLLAIRE VII.

86. SI l'on conçoit que le plan ſur lequel les Hyperboles oppoſées ſont tracées, ſoit plié le long de l'axe Aa, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent; il eſt clair (*fig.* 39.) lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, que les

deux Hyperboles opposées tomberont éxactement l'une sur l'autre ; sçavoir, les points *B*, *M*, &c. sur les points *b*, *M*, &c. puisque * toutes les perpendiculaires *Bb*, *MM* à cet axe, sont coupées par le milieu aux points *C*, *P*, &c.

* *Art.* 83.

Par la même raison (*fig.* 38.) lorsque l'axe *Aa* est le premier, les portions des Hyperboles opposées qui sont de part & d'autre de cet axe, tomberont éxactement l'une sur l'autre.

AVERTISSEMENT.

On a suivi jusqu'ici la même methode que dans l'Ellipse, & on auroit pû la continuer jusqu'à la fin ; mais comme il faut nécessairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moïen prouver les mêmes choses d'une maniere plus aisée, on a pris ce dernier parti.

DE'FINITIONS.

II.

FIG. 40. Si l'on mene du centre *C* deux droites indéfinies *CG*, *Cg*, paralleles aux lignes *Ab*, *AB*, menées de l'extremité *A* du premier axe *Aa*, aux deux extremités *B*, *b*, du second : ces deux droites seront appellées les *Asymptotes* de l'Hyperbole *MAM* ; & si on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles seront nommées les *Asymptotes* de l'Hyperbole opposée *MaM*.

12.

Le quarré de la partie *CG*, ou *Cg*, d'une asymptote, comprise entre le centre *C*, & la rencontre de la ligne *AB*, ou *Ab*, menée de l'extremité *A* du premier axe, à l'extremité *B*, ou *b*, du second, est appellé la *Puissance* de l'Hyperbole *MAM*, ou de son opposée *MaM*.

COROLLAIRE I.

COROLLAIRE I.

87. Il eſt évident que l'angle GCg, fait par les aſymptotes d'une Hyperbole, ou ſon égal BAb, eſt moindre, égal, ou plus grand qu'un droit ; ſelon que le ſecond axe Bb eſt moindre, égal, ou plus grand que le premier Aa. Car lorſque le premier axe Aa ſurpaſſe le ſecond Bb, ſa moitié CA, ſurpaſſe la moitié CB du ſecond ; & par conſéquent dans le triangle réctangle CAB, l'angle CAB eſt moindre qu'un demi-droit. Les deux angles égaux CAB, CAb, qui font enſemble l'angle BAb, ſeront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas ſe démontrent de la même maniére.

COROLLAIRE II.

88. A cause des triangles ſemblables BAb, BGC, il eſt clair que la ligne AB eſt diviſée par l'aſymptote CG en deux parties égales au point G, & que CG eſt la moitié de Ab; puiſque BC eſt la moitié de Bb. On prouvera de même que Ab eſt diviſée par l'aſymptote Cg en deux parties égales au point g, & que Cg eſt la moitié de AB. Donc toutes les lignes CG, GA, GB, Cg, gA, gb, ſont égales entr'elles ; puiſqu'elles ſont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes AB, Ab, que l'on ſçait être égales entr'elles, ſuivant la définition 5ᵉ.

COROLLAIRE III.

89. La puiſſance d'une Hyperbole eſt égale à la quatriéme partie de la ſomme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant CA, t; CB, c; CG, m; on aura *$BA = 2m$, *Art. 88.
& à cauſe du triangle réctangle ACB, le quarré $\overline{AB}^2$ $(4mm) = tt + cc$. Et par conſéquent $\overline{CG}^2$ $(mm) = \frac{tt+cc}{4}$.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 40. 90. *Si l'on mene par un point quelconque* M *de l'une ou de l'autre des Hyperboles opposées, une ligne droite* R r *perpendiculaire au premier axe* A a *qu'elle rencontre en* P, *& terminée par les asymptotes en* R *&* r; *je dis que le réctangle de* RM *par* Mr, *est égal au quarré de* BC, *moitié du second axe* B b.

Il faut prouver que $RM \times Mr = \overline{BC}^2$.

Nommant les connuës CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles semblables ACB, CPr, & ACb, CPR, donnent $CA(t) . CB$ ou $Cb(c) :: CP(x) . Pr$, ou $PR = \frac{cx}{t}$. Donc RM, ou $PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$; & Mr, ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conséquent $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy = \overline{BC}^2 (cc)$ en mettant

* Art. 81. pour yy sa valeur * $\frac{ccxx}{tt} - cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

91. Il est clair que $\overline{PM}^2 (\frac{ccxx}{tt} - cc)$ est toûjours moindre que $\overline{PR}^2$ ou $\overline{Pr}^2 (\frac{ccxx}{tt})$; Et par conséquent que tous les points des Hyperboles opposées, tombent dans les angles faits par leurs asymptotes; de sorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE II.

92. Si l'on mene par deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les asymptotes: il est évident que les réctangles $RM \times Mr$, $KN \times Nk$, seront toûjours égaux entr'eux; puisqu'ils sont égaux chacun au quarré de la

moitié BC du second axe Bb. D'où l'on voit que $RM. KN :: Nk. Mr.$

PROPOSITION IV.

Theorême.

93. Si *l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* Hh, Ll, *paralleles entr'elles, & terminées par les asymptotes; je dis que les rectangles* HM × Mh, LN × Nl, *seront égaux entr'eux.*

Il faut prouver que HM × Mh = LN × Nl.

Ayant mené les droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe Aa, il est clair que les triangles MRH, NKL, & Mrh, Nkl, sont semblables; puisqu'ils sont formés par des paralleles. On aura donc $RM. KN :: HM. LN$. Et $Nk. Mr :: Nl. Mh$. Or * $RM. KN :: Nk. Mr$. Donc $HM. LN :: Nl. Mh$. Et par conséquent $HM \times Mh = LN \times Nl$. *Ce qu'il falloit &c.*

* Art. 92.

COROLLAIRE I.

94. Si l'on suppose que la ligne NL parallele à MH, passe par le centre C, c'est à dire, qu'elle devienne CE: il est clair que les deux points L, l, se réüniront au centre C; & partant que le rectangle $LN \times Nl$, deviendra le quarré $\overline{EC}^2$. D'où l'on voit que si l'on mene d'un point quelconque E, de l'une des Hyperboles opposées au centre C, la droite CE, & par un autre point quelconque M de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne MHh, parallele à CE, & qui rencontre les asymptotes en H & h; le quarré de CE sera égal au rectangle de HM par Mh.

COROLLAIRE II.

95. Si l'on mene par un point quelconque N, de l'une des Hyperboles opposées, une ligne droite Ll, terminées par les asymptotes, & qui rencontre l'une ou

l'autre de ces Hyperboles en un autre point n; les parties LN, ln, de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant LN, a; Nn, b; nl, c; on aura $LN \times Nl\,(ab \mp ac) = HM \times Mh = Ln \times nl.\,(bc \mp ac)$, d'où l'on tire $LN\,(a) = ln\,(c)$.

COROLLAIRE III.

96. Si l'on suppose dans le Corollaire précedent que la ligne Nn, terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre C, c'est à dire, qu'elle devienne le premier diametre ED: il est évident que les deux points L, l, se réüniront au centre C; & qu'ainsi NL deviendra EC, & nl, CD. D'où l'on voit que tout premier diametre DE, est divisé en deux également par le centre C.

COROLLAIRE IV.

97. Si deux lignes droites Mm, Nn, paralleles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points H, L; je dis que les réctangles $MH \times Hm$, $NL \times Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est necessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points h, l; les parties MH, mh, & NL, nl, seront égales * entr'elles: & partant, puisque $HM \times Mh = LN \times Nl$, il s'ensuit que $MH \times Hm = NL \times Ln$.

* Art. 95.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 41.

98. S*i l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* MH, NL, *paralleles entr'elles & terminées par un asymptote; & deux autres droites* Mh, Nl, *aussi paralleles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote; je dis que les réctangles*

HM×Mh, NL×Nl, *sont égaux entr'eux.*

Cette Proposition se prouve de la même maniere que la précedente, & il n'y a rien à changer dans la démonstration.

COROLLAIRE I.

99. Si les droites MH, Mh, & NL, Nl, sont paralleles aux deux asymptotes; il est clair que les parallelogrammes $MHCh$, $NLCl$, aussi-bien que les triangles CHM, CLN, qui en sont les moitiés, sont égaux entr'eux; puisque les côtés de ces parallelogrammes autour des angles égaux HMh, LNl, sont réciproquement proportionnels. FIG. 42.

COROLLAIRE. II.

100. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précedent, il est visible que $CH \times HM = CL \times LN$; puisque dans cette supposition $Mh = CH$, & $Nl = CL$: c'est à dire, que si l'on mene par deux points quelconques M, N, de l'une, ou des Hyperboles opposées, deux droites MH, NL, paralleles à l'une des asymptotes, & terminées par l'autre; les réctangles $CH \times HM$, $CL \times LN$, seront toûjours égaux entr'eux; & qu'ainsi $CH. CL :: LN. MH$.

COROLLAIRE III.

101. Puisque l'extremité A du premier axe, est un des points de l'Hyperbole, & que la ligne AB, qui coupe en G, l'asymptote CG, est parallele à l'autre asymptote Cg; il s'ensuit * que le réctangle $CH \times HM$ sera toûjours égal au même réctangle $CG \times GA$, ou * au quarré $\overline{CG}^2$, c'estå dire, selon la définition 12e, à la puissance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée CG, m; & les indéterminées CH, x; HM, y; on aura toûjours $CH \times HM$ $(xy) = \overline{CG}^2$ (mm). Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par * Art. 100. * Art. 88.

rapport à ses asymptotes ; il s'ensuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ses asymptotes.

COROLLAIRE IV.

102. Il suit de ce que $HM\ (y) = \frac{mm}{x}$, que plus CH (x) augmente, plus au contraire $HM\ (y)$ diminuë ; de sorte que $CH\ (x)$ étant infiniment grande, $HM\ (y)$ sera alors infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole *AM*, & son asymptote *CH* (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée ; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en est de même pour l'autre asymptote *Cg*.

COROLLAIRE V.

103. Entre toutes les lignes qui passent par le centre *C*, 1°. Celles qui, comme *Aa*, tombent dans les angles faits par les asymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles opposées en un seul point *A*, ou *a* ; & étant prolongées, elles passent au dedans de ces Hyperboles. Car à cause des angles *GCA*, *gCA*, & de leurs opposés au sommet, il est clair que la ligne *Aa*, s'éloigne de plus en plus de l'un & de l'autre asymptote ; au lieu que les Hyperboles opposées s'en approchent toûjours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme *Bb*, tombent dans les angles d'à côté, faits aussi par les asymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles opposées, quoiqu'on les prolonge à l'infini ; puisqu'aucun des points des Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.

D'où l'on voit * que tous les premiers diametres, tombent dans les angles faits par les Asymptotes du côté des Hyperboles, & que les seconds tombent dans les angles d'à côté.

* Art. 102.
* Art. 91.
* Def. 9.

COROLLAIRE VI.

104. Si l'on mene par un point quelconque H, de l'une des asymptotes CE, une parallele HM, à l'autre Ce; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un seul point M; & étant continuée, elle passera au dedans. Car sa distance de Ce, demeure par tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche *toûjours de plus en plus. FIG. 43. * Art. 102.

COROLLAIRE VII.

105. DE-LA il est évident que si par un point quelconque M, d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies MH, Mh, paralleles à ses asymptotes Ce, CE.

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui est opposée, tomberont dans l'angle HMh; puisqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par ses asymptotes, lequel est renfermé dans l'angle HMh. * Art. 91.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainsi aucun de ses points ne tombera dans l'angle opposé au sommet à l'angle HMh.

3°. Toutes les lignes qui, comme MF, tombent dans l'angle HMh, rencontrent (étant prolongées du côté de F) l'Hyperbole opposée en un point N, & passent au dedans; puisqu'elles s'écartent de plus en plus des droites MH, Mh, &par consequent de ses deux asymptotes qui leur sont paralleles: mais étant prolongées de l'autre côté du point M, elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui passe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme Ee, tombent dans les angles à côté de l'angle HMh, rencontrent les deux asymptotes de l'Hyperbole qui passe par le point M; ainsi lorsqu'elles passent au dedans de l'une de ses portions, elles la rencontrent necessairement en quelque point N, puisqu'elles vont rencontrer l'asymptote qui tombe au dehors de cette portion.

COROLLAIRE VIII.

106. 1°. Si l'on mene par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, une ligne droite *Ff*, qui rencontre l'une de ses asymptotes au point *F*, & l'une des asymptotes de l'Hyperbole opposée au point *f*; & qu'on la prolonge en *N*, en sorte que *fN*, soit égale à *FM*: je dis que le point *N*, sera à l'Hyperbole opposée. Car la ligne *Ff*, tombe dans l'angle *HMh*, & rencontre par consequent l'Hyperbole opposée en quelque point *N*, comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire

* Art. 95. précedent. Donc * &c.

2°. Si l'on mene par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, une ligne droite *Ee*, terminée par ses asymptotes, & qu'on prenne sur cette ligne, la partie *eN*, égale à *EM*: je dis que le point *N*, sera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant *MH*, parallele à l'asymptote *Ce*, & terminée par l'autre en *H*, si l'on prend sur cette autre asymptote, la partie *CL*, égale à *HE*, & qu'on tire *LN*, parallele à *HM*; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point *N*, & dans l'article 100. que ce point sera tel que *CL* ou *HE*. *HM* :: *CH* ou *EL*. *LN*; d'où l'on voit que la ligne *LN*, rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite *Ee*. Mais à cause des paralleles *HM*, *LN*, il est clair que $eN = EM$, puisque $CL = HE$. Donc &c.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 43. 107. D'UN *point donné* M, *sur une Hyperbole dont les asymptotes* CE, Ce, *sont données; mener la tangente* DMd; *& démontrer qu'on n'en peut mener qu'une seule.*

Ayant mené du point donné *M*, une parallele *MH*, à l'une des asymptotes *Ce*, & terminée par l'autre *CE*, au point *H*; on prendra sur cette asymptote, la partie *HD*,

HD égale à *HC*; on tirera par le point donné *M*, la droite *DM*, qui rencontre l'asymptote *Ce* en un point *d*. Je dis en premier lieu, que cette ligne *DMd*, touchera l'Hyperbole au point *M*.

Car à cause des triangles semblables *CDd*, *HDM*; la ligne *Dd*, terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point *M*, de même que *CD*, l'est en *H*. Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point *O*, il est clair que *Od*, seroit * égale à *MD*, & par consequent à *Md*, c'est à dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne *DMd*, ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point *M*. De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne *Ee*, il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point *N*; puisqu'elle iroit, rencontrer en un point *e*, l'asymptote *Ce*, qui tombe * au dehors de cette portion. Il est donc évident que la ligne *Dd*, ne rencontre l'Hyperbole, qu'au seul point *M*, & qu'elle n'entre point au dedans; c'est à dire, qu'elle est tangente en ce point.

* Art. 95.

* Art. 91.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne *DMd*, qui puisse toucher l'Hyperbole au point *M*; car si l'on prend sur l'asymptote *CE*, la partie *HE*, plus grande ou moindre que *HD*, & qu'on tire par le point donné *M*, la droite *EM*, qui rencontre l'autre asymptote *Ce*, au point *e*, il est clair à cause des paralleles *MH*, *Ce*, que *ME* sera plus grande ou moindre que *Me*; puisque *HE* a été prise plus grande ou moindre que *HD* ou que *HC*. Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie *Me*, le point *N*, en sorte que *Ne* soit égale à *ME*, il est évident que ce point * sera encore à l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne *Ee*, ne la touchera point au point *M*. Ce qui restoit à démontrer.

* Art. 106.

REMARQUE.

108. On a démontré dans l'art. 102. que plus *CH* devient grande, plus au contraire *HM* diminuë; de sorte que *CH* étant infiniment grande, *HM* devient infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. Or *CH* étant infiniment grande, *HD* (qui lui est égale) la sera aussi; & par conséquent les lignes *MD*, *HD*, qui ne se rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme paralleles, tomberont l'une sur l'autre; puisque le point *M* se confond alors avec le point *H*: c'est à dire, que l'asymptote *CE*, étant prolongée à l'infini, aussi-bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans son extremité. Il en est de même de l'autre asymptote *Ce*, laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans son autre extremité.

D'où l'on voit que les deux asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles opposées dans leurs extremités.

COROLLAIRE I.

109. Comme il n'y a que la seule ligne *DMd*, laquelle étant terminée par les asymptotes, soit coupée en deux parties égales au point *M*; il s'ensuit que si une ligne droite *DMd*, terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point *M*, qui coupe cette ligne droite en deux parties égales; elle sera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que si une ligne droite *DMd*, terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point *M*; elle sera coupée en deux parties égales par ce point.

COROLLAIRE. II.

FIG. 44. 110. Si par le point touchant *M* d'une tangente quelconque *DMd*, terminée par les asymptotes *CL*,

Cl, d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre *MCm*; & que par le point *m*, où il rencontre l'Hyperbole opposée, l'on tire une parallele *Ee*, à la tangente *Dd*, terminée par les asymptotes aux points *E*, *e*: je dis que cette ligne sera tangente au point *m*. Car les triangles *CMD*, *CmE*, seront semblables & égaux, puisque * *CM* est égal à *Cm*. La ligne *mE*, sera donc égale à *MD*. On prouvera de même (à cause des triangles semblables & égaux *CMd*, *Cme*) que *me* est égale à *Md*. C'est pourquoi la ligne *Ee* est divisée en deux également au point *m*; puisque *Dd* l'est au point *M*. Et par conséquent * elle sera tangente en *m*.

* *Art.* 96.

* *Art.* 109.

D'où l'on voit que les tangentes *Dd*, *Ee*, qui passent par les extremités d'un premier diametre quelconque *Mm*, sont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorsqu'elles sont terminées par les asymptotes.

DÉFINITIONS.

13.

S'il y a deux diametres *Mm*, *Ss*, dont l'un *Ss*, soit parallele aux tangentes qui passent par les extremités de l'autre *Mm*; & de plus terminé en *S*, *s*, par les droites *MS*, *Ms*, menées de l'une des extremités *M* du diametre *Mm*, parallelement aux asymptotes: ces deux diametres *Mm*, *Ss*, seront appellés ensemble *Conjugués*. FIG. 44.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles opposées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, sont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi *NO*, est une ordonnée au diametre *Mm*.

15.

Si l'on prend une troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, elle sera le *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

COROLLAIRE I.

111. La définition 13e convient aux deux axes; puisque selon l'article 84. le second axe est parallele aux tangentes qui passent par l'extremité du premier; & que de plus, selon la définition 11e, il est terminé par deux droites menées de l'une des extremités du premier axe, parallelement aux asymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diametres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

COROLLAIRE II.

112. Comme le diametre SCs, est parallele à la tangente DMd, qui passe par l'une des extremités M du diametre MCm, & que cette tangente rencontre les deux asymptotes CD, Cd, de l'Hyperbole, qui passe par le point M: il s'ensuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle DCd, fait par les asymptotes de cette Hyperbole; Et qu'ainsi c'est un second diametre.

D'où l'on voit qu'entre deux diametres conjugués MCm, SCs; il y en a toûjours un premier Mm, & un second Ss.

COROLLAIRE III.

113. Le second diametre SCs, est coupé par le milieu au centre C, & de plus égal à la tangente DMd, qui passant par l'une des extremités M du premier diametre Mm, qui lui est conjugué, est terminée par les asymptotes. Car à cause des paralleles MS, Cd, & Ms, CD; il est clair que CS est égale à Md, & Cs à MD. Or DMd, est divisée * en deux parties égales au point touchant M. Donc &c.

* Art. 109.

COROLLAIRE IV.

114. Deux diametres conjugués Mm, Ss, étant donnés, & sçachant lequel des deux est un premier diametre; il ne faut pour avoir les asymptotes CD, Cd, que

tirer par le centre *C*, des paralleles aux deux droites *MS*, *Ms*, menées de l'une des extremités *M*, du premier diametre *Mm*, aux deux extremités *S*, *s*, du second.

Et réciproquement les deux aſymptotes *CD*, *Cd*, d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ſes points *M*; il ne faut pour avoir deux de ces diametres conjuguez *MCm*, *SCs*, que tirer *MH* parallele à l'une des aſymptotes *Cd*, qui rencontre l'autre aſymptote *CD* en *H*; & l'ayant prolongée en *S*, en ſorte que *HS* ſoit égale à *HM*, mener les droites *CM*, *CS*. Car tirant *MD* parallele à *CS*, il eſt clair à cauſe des triangles ſemblables *CHS*, *MHD*, que *HD* eſt égale à *HC*; puiſque *MH* eſt égale à *HS*; & qu'ainſi * *MD* eſt tangente en *M*: d'où il ſuit ſelon la définition 13e, que les lignes *CM*, *CS*, ſont deux demi-diametres conjuguez. * Art. 107.

Il eſt donc évident que deux diametres conjuguez *Mm*, *Ss*, étant donnés de poſition & de grandeur, & ſçachant de plus lequel des deux eſt un premier diametre; on a les deux aſymptotes *CD*, *Cd*, avec l'un des points *M*, de l'une des Hyperboles oppoſées.

Et réciproquement que les aſymptotes *CD*, *Cd*, d'une Hyperbole étant données, avec un de ſes points *M*; on a deux de ſes diametres conjuguez *Mm*, *Ss*, de poſition & de grandeur; & l'on ſçait lequel des deux eſt un premier diametre; ſçavoir, celui qui paſſe par le point donné *M*.

COROLLAIRE IV.

115. Un ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diametre *Mm*, qui lui eſt conjugué; on lui menera par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les aſymptotes, une parallele *Ll*, terminée par les aſymptotes en *L*, *l*; & par ſon point de milieu *O*, le premier diametre *CO*, qui rencontrera l'Hyperbole en

un point *M*; par lequel ayant tiré les droites *MS*, *Ms*, paralleles aux asymptotes; il est clair, selon la définition 13[e], que les points *S*, *s*, où elles rencontrent le second diametre *SCs*, donné de position, en déterminent la grandeur, & que le premier diametre *MCm* lui est conjugué. Car menant par le point *M*, la ligne *Dd*, parallele à *Ll*, & terminée par les asymptotes, elle sera coupée en deux également au point *M*; puisque *Ll*,
* Art. 109. l'est au point *O*: & partant * elle sera tangente en *M*.

De-là, il est évident qu'un second diametre *SCs*, étant donné de position, sa grandeur est déterminée en sorte qu'il ne peut en avoir qu'une seule; comme aussi la grandeur & la position du premier diametre *Mm*, qui lui est conjugué.

COROLLAIRE V.

116. UN second diametre *SCs*, étant donné de position & de grandeur, avec son parametre, & la position de ses ordonnées; il sera facile de trouver de position & de grandeur le premier diametre *MCm*, qui lui est conjugué, avec son parametre. Car ayant mené par le centre *C*, une parallele indéfinie aux ordonnées du diametre *Ss*, on marquera sur cette ligne deux points *M*, *m*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*, en sorte que *Mm*, soit égale à la moyenne proportionnelle entre le second diametre *Ss*, & son parametre. Puis ayant trouvé une troisiéme proportionnelle aux deux lignes *Mm*, *Ss*, il est clair, selon les définitions 14 & 15, que *Mm*, sera le premier diametre conjugué au diametre *Ss*, & qu'il aura pour son parametre cette troisiéme proportionnelle.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 44. 117. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON, *au premier diametre* Mm, *est au rectangle de* MO *par* Om, *par*

ties de ce diametre prolongé; comme le quarré de son conjugué Ss, *est au quarré de ce premier diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO\times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené par l'une des extremités *M*, du premier diametre *Mm*, une parallele *Dd* au second diametre *Ss*, terminée par les asymptotes; elle sera tangente en *M*, selon la définition 13ᵉ. Et par conséquent * elle sera coupée en deux également par ce point : c'est pourquoi, si l'on prolonge l'ordonnée *ON* (qui selon la définition 14. est parallele au diametre *Ss*) de part & d'autre du diametre *Mm*, elle rencontrera les asymptotes en deux points *L*, *l*, qui seront également éloignés de part & d'autre du point *O*. Cela posé, soient nommées les données *CM*, ou *Cm*, *t*; *CS*, ou *Cs*, ou * *MD*, ou *Md*, *c*; & les indéterminées *CO*, *x*; *ON*, *y*; on aura à cause des triangles semblables *CMD*, *COL*; cette proportion : $CM(t) . MD(c) :: CO(x) . OL$ ou $Ol = \frac{cx}{t}$. Donc LN ou $LO \pm ON = \frac{cx}{t} \pm y$, & Nl ou $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$; Et partant $LN\times Nl = \frac{ccxx}{tt} - yy =$ * $DM\times Md = cc$. D'où il suit que $\overline{ON}^2 (yy) . MO\times Om\ (xx - tt) :: \overline{Ss}^2 (4cc) . \overline{Mm}^2 (4tt)$. Puisqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy = 4ccxx - 4cctt$, c'est à dire (en divisant par $4tt$, & transposant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{ccxx}{tt} - yy = cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 109.
* *Art.* 113.
* *Art.* 90.

COROLLAIRE GENERAL.

118. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde *, par rapport aux deux axes *Aa*, *Bb*, s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques, *Mm*, *Ss*. Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle *ACB*, soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'en-

* *Art.* 79.

suit que si l'on suppose dans ces articles que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres conjugués quelconques, ces articles seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeure toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

Fig. 45. 119. Soient *deux tangentes quelconques* DE, FG, *d'une Hyperbole* MA, *terminées par les asymptotes, & qui s'entrecoupent en un point* O ; *je dis que les côtés des triangles* CDE, CFG, *autour de l'angle commun* C, *sont réciproquement proportionnels.*

Il faut prouver que CD. CF :: CG. CE.

Ayant mené par les points touchans *M*, *A*, les paralleles *MH*, *AL*, à l'asymptote *CG* ; il est clair à cause des triangles semblables *CDE*, *HDM*, que *CD* est double de *CH*, & *CE* double de *HM* ; puisque *DE* est * double de *DM*. Et à cause des triangles semblables *CFG*, *LFA*, que *CF* est double de *CL*, & *CG* double de *LA* ; puisque *FG*, est double de *FA*. Or * *CH*. *CL* :: *LA*. *HM*. Et partant si l'on prend le double de chaque terme, on aura 2*CH* ou *CD*. 2*CL* ou *CF* :: 2*LA* ou *CG*. 2*HM* ou *CE*. *Ce qu'il falloit &c.*

* Art. 109.

* Art. 100.

COROLLAIRE.

120. Il suit de cette Proposition que les droites *DG*, *FE*, sont paralleles entr'elles. D'où il est évident :

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, sont égaux ; car les triangles *FDE*, *FGE*, qui ont la même base *FE*, & qui sont entre les mêmes paralleles *DG*, *FE*, sont égaux ; Et partant, si l'on ajoûte de part & d'autre le même

même triangle *CFE*, on formera les triangles *CDE*, *CFG*, qui seront égaux entr'eux.

2°. Que la ligne *DE*, est couppée en même raison aux points *M*, *O*, que la ligne *FG* l'est aux points *A*, *O*. Car menant par les points touchans la droite *MA*, il est clair qu'elle sera parallele aux deux droites *DG*, *FE*; puisqu'elle couppe par le milieu les droites *DE*, *FG*, renfermées entre ces paralleles.

PROPOSITION IX.

Theorême.

121. S*i par un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* Aa *que l'on voudra, & une tangente* MT *qui le rencontre en* T; *je dis que* CP. CA :: CA. CT. *en observant que les points* P, T, *tombent du même côté du centre* C, *lorsque la ligne* Aa *est un premier diametre; & au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre, lorsque c'est un second diametre.* FIG. 46. & 47.

Premier cas. Lorsque la ligne *Aa* est un premier diametre. On prolongera la tangente *MT* jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes *CD*, *CG*, aux points *D*, *E*; & l'ordonnée *PM*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote *CD* au point *N*; on menera ensuite par le point *A* la ligne *AK*, parallele à *DE*, qui rencontre l'asymptote *CG* au point *K*, & la tangente *FG* terminée par les asymptotes, qui sera parallele * à *PM*, & qui rencontre au point *O* l'autre tangente *DE*. FIG. 46. * Def. 14.

Cela posé, *AP* est à *AC*, ou *FN* à *FC*, en raison composée de *FN* à *FD*, ou de *OM* à *OD*, ou * de *OA* à *OG*, ou de *EK* à *EG*, & de *FD* à *FC*, ou * de *EG* à *EC*. Or *AT* est à *TC*, ou *KE* à *EC*, en raison composée de *EK* à *EG*, & de *EG* à *EC*. Donc *AP*. *AC* :: *AT*. *TC*. puisque les raisons composantes de ces deux raisons sont les mêmes; & par consequent *AP*+*AC* ou *CP*. *CA* :: *AT*+*TC* ou *CA*. *CT*. *Ce qui étoit proposé en premier lieu.* * Art. 120. * Art. 120.

FIG. 47. *Second cas.* Lorsque la ligne Aa est un second diametre. Ayant mené par le centre C la ligne CK parallele à l'ordonnée PM, qui rencontre l'Hyperbole au point B, & la tangente MT au point R, & par le point touchant M la ligne MK parallele à Aa; il est clair que CB sera le premier demi-diametre conjugué au second Aa, & qu'ainsi MK sera ordonnée à ce diametre.

Cela posé, si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CB, c; & les indéterminées CP ou MK, x; PM ou CK, y; on aura selon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR = \frac{cc}{y}$; & partant RK ou $CK - CR = \frac{yy-cc}{y}$. Or les triangles semblables KRM, CRT, donnent $KR\left(\frac{yy-cc}{y}\right) . RC\left(\frac{cc}{y}\right) :: MK\,(x) . CT = \frac{ccx}{yy-cc} = \frac{tt}{x}$. en mettant pour $yy-cc$ sa valeur

* Art. 80. & 118. $\frac{ccxx}{tt}$ tirée de ce que $yy = {}^* \frac{ccxx}{tt} + cc$. C'est à dire que $CP . CA :: CA . CT$. *Ce qui restoit à démontrer.*

PROPOSITION X.

Theorême.

FIG. 48. & 49. 122. SI *par un point quelconque* M *d'une Hyperbole qui a pour centre le point* C, *on même une ordonnée* MP *à l'un ou à l'autre axe* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT, *laquelle passe par* M: *Je dis que* CP *sera toûjours à* PG *en la raison donnée de l'axe* Aa *à son Parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t; & les indé-

* Art. 121. terminées CP, x; PM, y; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; Et partant $PT = \frac{xx \mp tt}{x}$, selon que Aa est le premier ou le second axe. Or les triangles Rectangles semblables TPM, MPG, donnent $TP\left(\frac{xx \mp tt}{x}\right) . PM\,(y) :: PM$

(y). $PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$. D'où l'on tire cette proportion CP (x). $PG\,(\frac{xyy}{xx \mp tt}) :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2\,(xx \mp tt).\,\overline{PM}^2\,(yy)$. puisqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on trouve le même produit xyy. Mais $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ est à $\overline{PM}^2$, comme * l'axe Aa est à son parametre. Donc CP est aussi à PG en cette même raison. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 81.

PROPOSITION XI.

Theorême.

123. *Si d'un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on tire à ses deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf; *je dis que la tangente* MT, *qui passe par ce point* M, *divise en deux également l'angle* FMf. FIG. 50.

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, sur la tangente MT; le premier axe Aa, qui passe par les foyers F, f, & qui rencontre la tangente en T; & l'ordonnée MP, à cet axe: on nommera les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x. L'on aura MF * $(\frac{mx}{t} - t)$. $Mf\,(\frac{mx}{t} + t) ::\, TF$ ou CF $(m) - CT$ * $(\frac{tt}{x})$. Tf ou $Cf\,(m) + CT\,(\frac{tt}{x})$. puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Or les triangles réctangles semblables TFD, Tfd, donnent $TF.\,Tf :: FD.\,fd$. L'hypothenuse MF du triangle réctangle MDF, sera donc à l'hypothenuse Mf du triangle réctangle Mdf, comme le côté DF est au côté df; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Donc les angles FMD, fMd, qui sont opposés aux côtés homologues DF, df, seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 78. * *Art.* 121.

COROLLAIRE.

124. DE-LA il est évident, que la tangente MT, étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse l'Hyperbole AM, toute entiere du côté de son foyer interieur F. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point M, il est visible qu'elle sera concave dans toute son étenduë autour de son foyer interieur F.

PROPOSITION XII.

Theorême.

FIG. 51. 125. LA *difference des quarrés de deux diametres conjuguès quelconques* Mm, Ss, *est égale à la difference des quarrés des deux axes* Aa, Bb.

Il faut prouver que $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$, *ou que* $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$.

Def. 11. & 13. Si l'on mene les droites MS, AB, elles feront parallèles à l'asymptote Cg, & de plus couppées en deux également par l'autre asymptote CG, aux points H, G; *Def. 11. & 13. puisque * les lignes Ms, Ab, sont paralleles à cette asymptote, & que les seconds diametres Ss, Bb, sont coupés * en deux également au centre C: *Art. 113. C'est pourquoi si l'on mene sur l'asymptote CG, les perpendiculaires AF, BE, ML, SK, on formera les triangles GAF, GBE, & HML, HSK, qui seront semblables & égaux. Cela *Art. 88. posé, soient nommées les données CG ou * GA, m; GE ou GF, a; AF ou BE, b; & les indéterminées CH, x; HM, y: ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ ou $\overline{CB}^2 = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$ ou $\overline{CA}^2 = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4am$. Or les triangles semblables GAF, HML, fournissent $GA\,(m) \,.\, AF\,(b) :: HM\,(y) \,.\, ML$ ou $KS = \frac{by}{m}$. Et $GA\,(m) \,.\, GF\,(a) :: HM$

(y). HL ou $HK = \frac{ay}{m}$. Donc $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$ ou $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $\overline{CL}^2 + \overline{LM}^2$ ou $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$. Et partant $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$, en mettant pour xy sa valeur * mm. Donc $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$; *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 102.

Si l'angle GCg, fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; CF seroit alors plus grande que CE, & on prouveroit de la même maniere que $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$. Mais si l'angle GCg fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes AB, MS, seroient perpendiculaires sur l'asymptote CG; & qu'ainsi les deux demi-diametres conjugués CM, CS, seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes CA, CB. Or comme alors la difference des deux diametres conjugués Mm, Ss, est nulle, aussi-bien que celle des deux axes Aa, Bb; il s'ensuit que cette Proposition est vraïe dans tous les cas.

COROLLAIRE.

126. DE-LA il est évident qu'un premier diametre quelconque Mm, est moindre, plus grand, ou égal au second diametre Ss, qui lui est conjugué; selon que l'angle GCg, fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

DE'FINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appellées *Equilateres*, lorsque deux de leurs diametres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

COROLLAIRE.

FIG. 52. 127. Si d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatére, l'on mene une ordonnée MP à tel de ses
* Art. 81. & 118. diametres Aa qu'on voudra, on aura * $\overline{MP}^2 = \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$: sçavoir —, lorsque Aa est un premier diametre; & +, lorsque c'est un second. Car le diametre conjugué
* Art. 126. au diametre Aa * lui sera toûjours égal.

PROPOSITION XIII.

Problême.

FIG. 53. 54. & 55. 128. Deux *diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier; ou ce qui re-*
* Art. 114. *vient* * *au même, les asymptotes* CD, CF, *d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points quelconques* M: *mener deux diametres conjugués* Aa, Bb, *qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.*

Ayant couppé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point o, un arc dcf capable de l'angle DCF fait par les asymptotes; on menera par le point de milieu e, de la corde df, la ligne ec qui fasse avec cette corde de part ou d'autre l'angle dec ou fec égal à l'angle donné; & par le point c, où elle rencontre l'arc dcf, les droites cd, cf. Cela fait, on prendra sur les asymptotes les parties CD, CF, égales aux cordes cd, cf; & ayant tiré DF, l'on menera le second diametre Bb parallele à cette ligne, & le premier diametre Aa qui passe par son milieu E. Je dis que ces deux diametres Aa, Bb, font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils sont conjugués l'un à l'autre.

Car par la construction l'angle dcf est égal à l'angle DCF fait par les asymptotes; & par consequent les triangles DCF, dcf, & DCE, dce, sont égaux & semblables. L'angle BCa, que font entr'eux les deux diametres Aa, Bb, sera donc égal à l'angle DEC ou dec

qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mene par le point *A*, que je suppose être l'une des extremités du premier diametre *Aa*, une parallele à *DF*; il est clair qu'elle sera couppée également par ce point, puisque *DF* l'est au point *E*; & qu'ainsi * elle sera tangente en *A*; d'où il suit * que les diametres *Aa*, *Bb*, sont conjugués. * *Art.* 109. * *Def.* 13.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diametres, on tirera par le point donné *M*, une parallele *MKL* au premier diametre *Aa*, laquelle rencontre l'asymptote *CD* au point *K*, & l'autre asymptote *CF*, prolongée au delà du centre *C*, au point *L*: & ayant pris *CA* moyenne proportionnelle entre *KM*, *ML*; il est clair * que le point *A* sera l'une des extremités du premier diametre *Aa*; & qu'ainsi menant les lignes *AB*, *ab*, paralleles aux asymptotes *CF*, *CD*, elles * détermineront par leurs points de rencontre *B*, *b*, la grandeur du second diametre *Bb*. * *Art.* 94. * *Def.* 13.

Comme l'on peut mener deux differentes lignes *ec*, *ec*, qui fassent avec la corde *df*, de part & d'autre des angles *dec*, *fec*, égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toûjours trouver alors deux differens diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui satisferont également, comme l'on voit dans les figures 54. & 55. Mais il est à remarquer que les diametres conjugués *Aa*, *Bb*, de la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote *CF*, à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote *CD*; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions. Car,

1°. Menant du centre *o* au point *e*, milieu de la corde *df*, la ligne *oe*, elle sera perpendiculaire à cette corde, & par consequent les angles *oec*, *oec*, seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons *oc*, *oc*, les triangles *oec*, *oec*, qui ont le côté *oe* commun, les angles *oec*, *oec*, & les côtés *oc*, *oc*, égaux entr'eux, auront aussi leur troisiémes côtés *ec*, *ec*, égaux. Les triangles *fec*, *dec*, qui ont les côtés *ef*, *ed*, & *ec*, *ec*, & les

angles *fet*, *dec*, égaux, seront donc égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle *ecf*, ou *ECF*, de la figure 55. est égal à l'angle *ecd*, ou *ECD*, de la fig. 54. & qu'ainsi la position du diametre *Aa*, de la fig. 55. par rapport à l'asymptote *CF*, est semblable à celle du diametre *Aa*, de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote *CD*.

2°. Si l'on mene dans la figure 55. la ligne *Ml*, qui fasse avec l'asymptote *CF*, prolongée du côté du centre *C*, l'angle *MlC* égal à l'angle *MLC* ou *ECF*, de la figure 54: il est clair que les lignes *Ml*, *Mk*, de la figure 55. seront égales aux lignes *ML*, *MK*, de la figure 54; puisqu'on suppose que la position du point *M* par rapport aux asymptotes, est la même dans ces deux figures. Or l'angle *MlL*, complement à deux droits de l'angle *MlC*, de la figure 55. ou de *ECF* de la figure 54, est égal à l'angle *MKk*, complement à deux droits de l'angle *ECD* de la figure 55. ou de *ECF* de la fig. 54; Et par consequent dans fig. 55. les deux triangles *LMl*, *kMK*, qui ont l'angle en *M* commun, & les angles aux points *l*, *K*, égaux, seront semblables: ce qui donne *LM*. *Ml* :: *kM*. *MK*. Et partant $LM \times MK = lM \times Mk$ ou
*Art. 94. $LM \times MK$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi-diametres *CA*, *CA*, des figures 54 & 55, sont égaux. Il en est de même du diametre *Bb*; puisque sa position & sa grandeur dépendent de celles du premier diametre *Aa*, auquel il est conjugué.

Comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne *ec*, qui fasse avec la corde *df* de part ou d'autre, un angle égal
FIG. 56. & 57. à l'angle donné, lorsque cet angle est droit; il s'ensuit qu'il n'y a que deux diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui
*Art. 111. fassent entr'eux un angle droit; & qu'ainsi * ils seront les deux axes. Mais le triangle *dcf* ou *DCF*, étant alors isoscelle, le premier axe *Aa* divisera par le milieu l'angle *DCF* fait par les asymptotes; d'où l'on voit que pour trouver de position les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites *Aa*, *Bb*, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles *Aa*, divise par le milieu l'angle *DCF*,

DCF, fait par les asymptotes : aprés quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enseigner pour les diametres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre maniere. Soit menée par le point donné *M* une parallele *MH* à l'une des asymptotes *CF*, & terminée par l'autre *CD* au point *H*. Soit prise sur l'asymptote *CD*, la partie *CG* égale à la moyenne proportionnelle entre *CH*, *HM*: & soit tirée par le point *G* une parallele *AB* à *CF*, telle que chacune de ses parties *GA*, *GB*, soit égale à *CG*. Il est évident que les lignes *CA*, *CB*, * seront les deux demi-axes de position & de grandeur. * *Art.* 101. & 88.

COROLLAIRE.

129. Il est donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle droit ; & qu'ainsi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit ; que les deux premiers ont une position semblable par rapport à une asymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre asymptote ; d'où il suit qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre des deux axes, puisque les deux axes divisent par le milieu les angles faits par les asymptotes ; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions.

PROPOSITION XIV.

Problême.

130. DEUX *diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier ; ou ce qui est la même chose * les asymptotes de deux Hyperboles opposées étant données avec un de leurs points quelconque : décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.* * *Art.* 114.

PREMIERE MANIERE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enſeigner dans la Propoſition précedente ; & l'on décrira enſuite les Hyperboles oppoſées, ſelon l'article 76.

SECONDE MANIERE.

FIG. 58. Soient Aa, Bb, les diametres conjugués donnés, entre leſquels le diametre Aa eſt le premier ; ou bien CG, Cg, les aſymptotes données, avec le point A, un de ceux des Hyperboles oppoſées. Ayant mené par le point donné A une parallele AG, à l'une des aſymptotes Cg, & terminée par l'autre en G, on fera gliſſer le long de l'aſymptote CG, indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre C, une droite HK égale à CG, qui entraînera par ſon extremité H une parallele HM à l'aſymptote Cg, & par ſon autre extremité K, une droite KA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des droites AK, HM, décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles oppoſées qu'on demande.

Car à cauſe des triangles ſemblables KHM, KGA, on aura toûjours KH ou $CG. HM :: KG$ ou $CH. GA$. Et partant $CH \times HM = CG \times GA$. Le point M ſera donc * un des points de l'Hyperbole qui paſſe par le point donné A, & qui a pour aſymptotes les droites données CG, Cg ; ou de l'Hyperbole oppoſée.

* Art. 101.

PROPOSITION XV.

Problême.

131. LES mêmes choſes étant données que dans la Propoſition précédente ; décrire les Hyperboles oppoſées par pluſieurs points.

PREMIERE MANIERE.

FIG. 59. Soient CD, CE, les aſymptotes données, & A le

point donné. Ayant mené par ce point A autant de lignes DE, DE, DE, &c. qu'on voudra, terminées par les aſymptotes; & ayant pris ſur ces lignes droites les parties EM, EM, EM, &c. égales à AD, AD, AD, &c; ſçavoir chacune à ſa correſpondante: il eſt clair * 1°. Que les points M, M, M, &c, ſeront à l'Hyperbole qui paſſe par le point A, lorſque les points E, E, E, &c, tombent au deſſous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour aſymptotes les droites CD, CE. Faiſant donc paſſer par tous les points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle fait par les aſymptotes, une ligne courbe, & par les autres points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle oppoſé au ſommet à celui-ci, une autre ligne courbe; ces deux lignes ſeront les deux Hyperboles oppoſées qu'on demande. *Art. 106.

SECONDE MANIERE.

Soient les lignes Aa, Bb, les deux diametres conjugués donnés, entre leſquels Aa eſt le ſecond. Ayant pris ſur le premier demi-diametre CB prolongé indéfiniment du côté de B, de petites parties CE, EE, EE, &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra; on menera par celui des points E, qui eſt le plus proche du centre C, la ligne EP parallele à BA; & on prendra ſur le ſecond diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de petites parties CP, PP, PP, &c, toutes égales à CP, qu'il y a de petites parties CE, EE, EE, &c. Ayant tiré CD perpendiculaire & égale à CB, on menera par tous les points P, P, P, &c, des paralleles MPM, MPM, MPM, &c, au premier diametre Bb, ſur chacune deſquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à ſa correſpondante ED. Je dis que les deux lignes courbes qui paſſent par tous les points M ainſi trouvés, ſeront les deux Hyperboles oppoſées qu'on demande. FIG. 60.

Car nommant les données CA, t; CB ou CD, c; &

les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles semblables CAB, CPE, donneront cette proportion $CA(t) . CB(c) :: CP(x) . CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle ECD rectangle en C, (en imaginant chaque hypothenuse ED qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2 (yy) = \overline{CE}^2 \left(\frac{ccxx}{tt}\right)$
*Art. 81. & 118. $+ \overline{CD}^2 (cc)$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au second diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb; & comme cette démonstration convient à toutes les lignes PM, puisque chaque CP est toûjours à la correspondante CE, en la raison de CA à CB: il s'ensuit &c.

FIG. 61. *Def. 16. Lorsque les diametres conjugués Aa, Bb, sont égaux entr'eux, c'est à dire *, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont équilateres; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené CD perpendiculaire & égale à CA, & tiré par un point quelconque P du diametre Aa, une parallele MPM au premier diametre Bb; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point P, les parties PM, PM, égales chacune à PD, pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle PCD réctangle en C (en imaginant chaque hypothenuse CD) on aura toûjours $\overline{PD}^2$ ou $\overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CD}^2$ ou $\overline{CA}^2$; Et partant la ligne PM sera * une ordonnée au second diametre Aa,
*Art. 117. qui a pour conjugué le premier Bb qui lui est égal.

DE'FINITION.

17.

FIG. 62. Soient deux Hyperboles opposées AM, am, qui ayent pour premier axe la ligne Aa, & pour second axe la ligne Bb; & soient deux autres Hyperboles opposées BS, bs, qui ayent au contraire pour premier axe la ligne Bb, & pour second axe la ligne Aa: ces deux nouvelles Hyperboles BS, bs, sont appellées *Conjuguées*

aux deux premieres AM, am; & les quatre ensemble sont appellées Hyperboles *conjuguées*.

Corollaire.

132. Il est clair que les lignes Ba, Ab, sont paralleles; puisque les droites Aa, Bb, terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point C. D'où il suit, selon la définition 11e. que l'Hyperbole BS conjuguée à AM, a pour l'une de ses asymptotes la ligne CG asymptote de l'Hyperbole AM; & pour l'autre, la ligne Cg autre asymptote de l'Hyperbole AM indéfiniment prolongée du côté de C: puisque ces deux lignes passent par le centre C, & sont paralleles aux deux droites Ba, BA, menées de l'extremité B du premier axe Bb de l'Hyperbole BS aux deux extremités A, a, du second. Il est donc évident que les deux droites CG, Cg, paralleles à Ab, AB, indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre C, sont non seulement les asymptotes des Hyperboles opposées AM, am; mais aussi des deux autres BS, bs, qui leur sont conjuguées. *Def. 4. & 5.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

133. *Si l'on mene par un point quelconque* H *d'une asymptote* CG *commune aux deux Hyperboles* AM, BS, *une parallele* MS *à l'autre asymptote* Cg; *je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points* M, S, *qui seront également éloignés de part & d'autre du point* H.

Car, 1°. La ligne MS rencontrera * chacune des Hyperboles AM, BS, en un point. 2°. A cause de l'Hyperbole AM, le rectangle * $CH \times HM = CG \times GA$; & à cause de l'Hyperbole BS, le rectangle $CH \times HS = CG \times GB$. Donc, puisque * $GB = GA$, il s'ensuit que $CH \times HS = CH \times HM$; Et qu'ainsi $HS = HM$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 104. *Art. 101. *Art. 88.

COROLLAIRE I.

134. Si l'on mene des points *M*, *S*, des deux Hyperboles *AM*, *BS*, les diametres *MCm*, *SCs*, terminés par les deux autres Hyperboles *am*, *bs*; il est clair * que le diametre *Ss* sera le second diametre conjugué au premier *Mm* des deux Hyperboles opposées *AM*, *am*; & réciproquement que le diametre *Mm* sera le second diametre conjugué au premier *Ss* des deux Hyperboles opposées *BS*, *bs*. D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques *Mm*, *Ss*, de deux Hyperboles opposées *AM*, *am*, sont aussi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées; avec cette difference que le premier diametre *Mm* devient le second, & qu'au contraire le second *Ss* devient le premier.

*Art. 114.

COROLLAIRE II.

135. De-là il est manifeste que les Hyperboles conjuguées *BS*, *bs*, aux deux *AM*, *am*, passent par les extremités *S*, *s*, de tous les seconds diametres *SCs* de ces Hyperboles: & réciproquement que les Hyperboles *AM*, *am*, passent par les extremités *M*, *m*, de tous les seconds diametres *MCm* des deux Hyperboles *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées.



QUATRIE'ME LIVRE.

Des trois Sections Coniques.

DE'FINITION.

ON entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précédens ; sçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipse*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles opposées*.

PROPOSITION I.

Theorême.

136. S*I par l'extremité* A *d'un diametre quelconque* A a *d'une Ellipse, ou d'un premier diametre* A a *d'une Hyperbole, l'on mene une parallele* A G *à ses ordonnées* P M, *qui soit égale à son parametre ; & qu'on tire de l'autre extremité* a, *la droite* a G, *qui coupe en* O *une ordonnée quelconque* P M *prolongée s'il est necessaire : je dis que le quarré de l'ordonnée* P M *est égal au rectangle de* A P *par* P O. FIG. 63. & 64.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55. du second Livre, 81 & 118. du troisiéme, on aura $Aa . AG :: AP \times Pa . \overline{PM}^2$. Or à cause des triangles semblables aAG, aPO, il vient $Aa . AG :: Pa . PO :: AP \times Pa . AP \times PO$. Donc $\overline{PM}^2 = AP \times PO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

137. DE-LA il est évident que le quarré d'une ordonnée quelconque PM à un diametre Aa, est toûjours moindre dans l'Ellipse, & toûjours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du parametre AG

par la partie *AP* de ce diametre, prise entre son origine ou extremité *A*, & la rencontre *P* de l'ordonnée ; au lieu que dans la Parabole * ils sont égaux. Or c'est à cause de cette proprieté, que Apollonius, surnommé le *Grand Geometre*, a imposé aux Sections Coniques les noms qne nous avons marqués : car il a voulu donner à entendre par celui de *Parabole*, la justesse ou exactitude ; par celui d'*Ellipse*, le deffaut ou manquement ; & par celui d'*Hyperbole*, l'excés qui se trouve dans la comparaison des quarrés des ordonnées *PM*, avec les réctangles correspondans *AP×AG*.

* Art. 7. & 10. Fig. 65.

PROPOSITION II.

Theorême.

Fig. 66. & 67.

138. DANS *une Ellipse tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* Aa *est divisé en deux également par le centre* C, *& ne rencontre la Section qu'en deux points.*

On a démontré cette Proposition dans les articles 50 du second Livre ; 96 & 103 du troisiéme.

PROPOSITION III.

Theorême.

139. IL *ne peut y avoir qu'une seule tangente* LAL *qui passe par un point donné* A *sur une Section Conique.*

Cette Proposition se trouve démontrée dans les articles 21 du Livre premier ; 56 du Livre second ; & 107 du troisiéme.

PROPOSITION IV.

Theorême.

140. LES *tangentes* LAL, lal, *qui passent par les extremités* A, a, *d'un diametre quelconque d'une Ellipse, ou de deux*

deux Hyperboles opposées ; sont paralleles entr'elles.

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre second, & 110 du Livre troisiéme.

PROPOSITION V.

Theorême.

141. U*N diametre quelconque étant donné dans l'Ellipse ou dans les Hyperboles opposées ; je dis que la position du diametre qui lui est conjugué, est déterminée, de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.*

Car 1°. Si la Section est une Ellipse, ou qu'étant les Hyperboles opposées le diametre donné *Aa* soit un premier diametre ; il est clair selon l'article 56 du Livre second, & la définition 13e du troisiéme Livre, que son conjugué *Bb* sera parallele à la tangente *LAL*, qui passe par l'une de ses extremités *A*. Donc * &c. * *Art.* 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles opposées, le diametre donné *Bb* est un second diametre ; la chose a été démontrée dans l'article 115 du troisiéme Livre.

COROLLAIRE.

142. IL est donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ses diametres, la position des ordonnées à ce diametre, sera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une seule, & qu'elles sont toutes paralleles entr'elles. Car elles doivent être paralleles dans la Parabole * à la tangente qui passe par l'origine du diametre donné, & dans les autres * Sections au diametre conjugué au diametre donné. * *Art.* 21. * *Def.* 12, II. & 14, III.

PROPOSITION VI.

Theorême.

143. D*ANS une Ellipse tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* Aa *divise*

M

La Section en des portions AM, am, *qui étant prises de part & d'autre de ce diametre dans des positions contraires, sont parfaitement semblables & égales entr'elles.*

Car ayant pris sur le diametre *Aa* (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du
* *Art.* 45. 55. 85. & 118. centre *C* deux parties quelconques *CP*, *Cp*, égales entr'elles; & mené de part & d'autre les ordonnées *PM*, *pm*, il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles,
* *Art.* 142. & que les angles *CPM*, *Cpm*, sont * égaux. Si donc l'on conçoit que le plan *Cpm* separé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diametre *Aa* dans une position contraire, en sorte que la droite *Cp* tombe sur *CP*, & *pm*, sur *PM*; il est visible que le point *a* tombe-
* *Art.* 138. ra * sur le point *A*, & le point *m* sur le point *M*. Et comme cela arrivera toûjours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties *CP*, *Cp*; il s'ensuit que tous les points *m* de la portion *am*, tomberont exactement sur tous les points *M* de la portion *AM*; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 68. 69. 70. 71. 144. SI *l'on mene par un point quelconque* P *d'un diametre* Aa *d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diametre) une parallele* MPM *aux ordonnées à ce diametre; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points* M, M, *également éloignés de part & d'autre du point* P, *& non en davantage: Et reciproquement que si une ligne* MM *terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre* Aa *en un point* P, *autre que le centre, elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre.*

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 20 du Livre premier; 43, 45 & 55 du Livre second; 83, 85 & 118 du Livre troisiéme.

COROLLAIRE I.

145. De-là il est manifeste que si une ligne quelconque MM terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre Aa en un point P autre que le centre; toutes les paralleles à cette ligne terminées par la Section, le seront aussi.

PROPOSITION VIII.

Problême.

146. *Une Section Conique étant donnée, en trouver un diametre.*

Ayant mené deux droites MM, NN, paralleles entr'elles, & terminées par la Section; on tirera par leurs points de milieu P, Q, une ligne droite Aa qui sera un diametre.

Car * le diametre qui passe par le point P milieu de MM, doit aussi passer par le point Q milieu de NN. * *Art.* 145.

COROLLAIRE I.

147. Si l'on mene en même sorte un autre diametre quelconque Dd; il est clair que la Section conique sera une parabole * lorsque Dd est parallele à Aa; une Ellipse * lorsque Dd rencontre Aa au dedans de la Section; & enfin une Hyperbole * ou les Hyperboles opposées lorsque les diametres Dd, Aa, se rencontrent en un point C hors de la Section; & que dans ces deux derniers cas le point de rencontre C est le centre. Cela est une suite des définitions des diametres de ces trois lignes courbes. * *Def.* 7. I. * *Def.* 9. II. * *Def.* 9. III.

Lorsque l'Ellipse est donnée toute entiere, il suffit pour avoir le centre de mener un diametre Aa; car sa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipse, il n'y a * qu'à le diviser par le milieu en C. Il en est de même lorsque * les Hyperboles opposées sont données. * *Art.* 50. * *Art.* 96.

COROLLAIRE II.

148. De-la il suit qu'une Section Conique étant donnée, avec un point O sur le même plan, on peut toûjours mener un diametre Dd qui passe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné, O une parallele Dd à un diametre quelconque Aa; & dans l'Ellipse, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées, une ligne droite Dd qui passe par le point donné O, & par le centre C que l'on aura trouvé par le Corollaire précedent.

COROLLAIRE III.

149 De-la il est évident qu'une ligne droite MM, ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points M, M; & jamais en davantage. Car si l'on mene par le point de milieu P de la ligne MM un diametre Aa, il est clair selon l'article 144, qu'elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre; d'où il suit selon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points M, M.

Si la ligne droite passoit par le centre C; on auroit recours à l'article 138. où cela a déja été démontré.

COROLLAIRE IV.

150. Une Ellipse ou une Hyperbole (*fig.* 69. 70.) étant donnée; trouver deux de ses diametres conjugués Aa, Bb; & de plus mener les asymptotes CG, Cg, lorsque c'est une Hyperbole.

Ayant trouvé un diametre Aa par le moyen des deux paralleles MM, NN, & mené par le centre C une parallele Bb, à ces deux lignes: il est clair * que les diametres Aa, Bb, seront conjugués; puisque les lignes MM, NN, étant coupées en deux également par le diametre Aa aux points P, Q, seront * ordonnées de part & d'autre à ce diametre.

* *Def.* 12, II. & 14. III.

* *Art.* 144.

Maintenant pour mener (*fig.* 70.) les asymptotes CG, Cg; on fera $AP \times Pa. \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2. \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre AP, Pa, est à PM, de même CA est à CB ou Cb. Et ayant tiré les droites AB, Ab, on leur menera par le centre C les paralleles indéfinies Cg, CG, qui seront les asymptotes cherchées. Car il est clair que Bb sera * la grandeur du second diametre conjugué au premier Aa; & le reste est évident selon les définitions 13 & 14 du troisiéme Livre. *Art. 81. & 118.

PROPOSITION IX.

Problême.

151. UNE *Section Conique étant donnée, avec un de ses diametres* Aa; *trouver la position des ordonnées* PM *à ce diametre.*

Ayant mené deux paralleles au diametre donné Aa qui en soient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points M, M; je dis que la ligne MM qui coupe le diametre donné au point P, est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, pourvû que le point P ne tombe point sur le centre. FIG. 68. 69. 70. 71.

Car par la construction la ligne MM sera coupée en deux également par le diametre Aa au point P; & par conséquent elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. *Art. 144.

On peut toûjours par cette maniere trouver la position d'une ordonnée PM à un diametre donné Aa. Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig.* 68. & 70.) lorsque le diametre donné Aa est un premier diametre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux paralleles au diametre Aa, elles rencontreront chacune la Section en un point M; puisque * la Section s'éloigne toûjours de plus en plus à l'infini du diametre Aa. 2°. Dans l'Ellipse (*fig.* 69.), & dans les Hyperboles opposées (*fig.* 71.) lorsque le diametre donné *Art. 10. 20. 84. & 118.

Aa eſt un ſecond diametre : il eſt clair qu'on peut toûjours mener deux paralleles de part & d'autre du diametre *Aa*, qui coupent la Section chacune en un point *M*, en ſorte que la ligne *MM* rencontre le diametre donné *Aa* en un point *P* autre que le centre ; puiſque dans l'Ellipſe * les ordonnées du diametre *Aa* vont toûjours en diminuant depuis le centre *C* juſqu'en *A*, & qu'au contraire dans les Hyperboles oppoſées * elles vont toûjours en augmentant à meſure qu'elles s'éloignent du centre *C*.

* *Art.* 44. & 55.
* *Art.* 84. & 118.

COROLLAIRE I.

152. DE-LA on tire (*fig.* 68, 69, 70.) une nouvelle maniere de mener une tangente par un point donné *A* ſur une Section Conique donnée. Car * ayant mené par ce point un diametre *Aa*, & trouvé une double ordonnée *MPM* à ce diametre ; il eſt clair * que ſi l'on mene par le point *A* une parallele à *MM*, elle ſera tangente en *A*.

* *Art.* 148.
* *Art.* 10, 20, 44, 55, 84, 118. & *Def.* 9, I. 11, II. 7, III.

COROLLAIRE II.

153. DE-LA on voit encore comment une Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de leurs diametres quelconques *Aa* ; on peut trouver le diametre *Bb* qui lui eſt conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre *C* une parallele *Bb* aux ordonnées à ce diametre.

Ou bien ; ſoit *Bb* le diametre donné, & qu'il faille trouver ſon conjugué *Aa*. Ayant tiré *MM* parallele à *Bb* & terminée par la Section, on menera par ſon point de milieu *P*, & le milieu *C* de *Bb*, le diametre cherché *Aa*.

COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole *MAM* (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ſes ſeconds diametres *Bb* de poſition ; en terminer la grandeur, & trouver en même temps la poſition de ſes ordonnées.

On cherchera le premier diametre Aa conjugué au ſecond Bb, par le moyen de la ſeconde maniere du Corollaire précedent; & ayant fait $AP \times Pa . \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. Il eſt clair * que Bb ſera la grandeur du ſecond diametre Bb, & que ſes ordonnées ſeront paralleles au diametre Aa. *Art. 81. & 118.

PROPOSITION X.

Problême.

155. D'UN *point donné* T *hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes* TM, TM, *à cette Section.* FIG. 72. 73. 74.

POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (*fig.* 72.) par le point donné T * un diametre qui rencontre la Parabole au point A, & pris ſa partie AP égale à AT; on tirera par le point P * une parallelle aux ordonnées qui rencontrera * la Parabole en deux points M, M; par leſquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées. *Art. 148. *Art. 151. *Art. 144. *Art. 22. & 23.

POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (*fig.* 73.) par le point donné T * le diametre Aa, & pris CP troiſiéme proportionnelle à CT, CA; on menera par le point P, une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Ellipſe en deux points M, M; par leſquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées. *Art. 148. *Def. 11. l. 2, & nū 57. *Art. 144. *Art. 57. & 58.

POUR L'HYPERBOLE & LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

Ayant mené (*fig.* 74.) par le point donné T, * le diametre Aa, dont on déterminera la grandeur * s'il eſt un ſecond diametre; on prendra * CP troiſiéme proportion- *Art. 148. *Art. 154. *Art. 121

nelle à CT, CA (du même côté du point donné T, par rapport au centre, lorsque ce point tombe dans l'un des angles faits par les asymptotes; & du côté opposé, lorsqu'il tombe dans l'un des angles à côté): & l'on menera par le point P une parallele aux ordonnées qui ren-
* *Art.* 144. contrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M, M; par lesquels & par le point donné
* *Art.* 121. T, on tirera les droites TM, TM, qui seront * les tangentes cherchées.

Si le point donné tomboit sur le centre C, les deux
* *Art.* 108. tangentes seroient alors * les asymptotes CG, Cg; & on les tireroit comme l'on a enseigné dans l'art. 150. Et enfin si le point donné tomboit sur une asymptote comme en S, on tireroit par le point H milieu de CS, une parallele HM à l'autre asymptote CG, laquelle rencon-
* *Art.* 104. treroit * l'Hyperbole en un point M, par où & par le
* *Art.* 107. point donné S, on tireroit une droite SM qui seroit * une des tangentes cherchées; & l'autre seroit l'asymptote même Cg sur laquelle se trouve le point donné S.

COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne MPM parallele aux ordon-
* *Art.* 144. nées rencontre toûjours * la Section en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage; il s'ensuit qu'on ne peut mener d'un point donné T hors une Section Conique que les deux tangentes TM, TM. D'où il est évident que le diametre qui passe par le point de rencontre T de deux tangentes, coupe par le milieu en P la ligne MM qui joint les points touchans; & réciproquement que le diametre qui coupe par le milieu en P une ligne droite MM qui joint les points touchans de deux tangentes MT, MT, passe par leur point de rencontre T.

COROL. II.

COROLLAIRE II.

157. TOUTES les tangentes de la Parabole (*fig.* 72.) se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire. Car si l'on joint deux points touchans quelconques M, M, par une ligne droite, & qu'aprés l'avoir coupée par le milieu en P, on prenne sur le diametre qui passe par ce point, & qui rencontre la Parabole en A, la partie * AT égale à AP; il est clair que les deux tangentes MT, MT, qui passent par les points M, M, se rencontreront en ce point T. * Def. 9. l. 1.

COROLLAIRE III.

158. IL est encore évident (*fig.* 74.) que toutes les tangentes d'une Hyperbole se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire; & toûjours au dedans de l'angle fait par les asymptotes. Car si l'on joint deux points touchans quelconques M, M, par une ligne droite, & qu'aprés l'avoir coupée par le milieu en P, on prenne sur le diametre qui passe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en A, la partie CT troisiéme proportionnelle à CP, CA; il est clair que les deux tangentes MT, MT, se rencontreront en ce point T, lequel sera toûjours * au dedans de l'angle fait par les asymptotes, puisque le demi-diametre CA tombe au dedans de cet angle. * Art. 105.

COROLLAIRE IV.

159. TOUTES les tangentes d'une Ellipse ou des Hyperboles opposées (*fig.* 73. 74.) se rencontrent deux à deux, lorsque la ligne qui joint les deux points touchans ne passe point par le centre: sçavoir, celles de l'Ellipse du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles opposées de l'autre côté. Cela se prouve par le moyen de la Proposition cy-dessus,

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

PROPOSITION XI.

Problême.

160. **U**NE *Séction Conique étant donnée, en trouver un diametre qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à un angle donné.*

POUR LA PARABOLE.

*Art. 146. Fig. 75. 76. Ayant trouvé * un de ses diametres *AP*, on menera par son origine *A*, la ligne *AN*, qui fasse avec *AP* de part ou d'autre l'angle *PAN* égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point *N*. Ayant divisé *AN* par le milieu en *O*, & tiré *OM* parallelle à *AP*; je dis que la ligne *MO* est le diametre qu'on cherche.

Car 1°. Tous les diametres d'une Parabole devant être paralleles entr'eux, selon la definition septiéme du premier Livre, il s'ensuit que *MO* sera un diametre; puisque *AP* en est un.

2°. La ligne *AN* terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diametre *MO*, elle lui
* Art. 144 sera * ordonnée de part & d'autre.

3°. A cause des paralleles *MO*, *AP*, l'angle *MOA* que fait le diametre *MO* avec son ordonnée *OA*, sera égal à l'angle *PAN* qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

Si l'angle donné est droit, il est manifeste que le dia-
*Art. 23. metre *MO* qu'on trouvera par cette methode sera * l'axe de Parabole.

POUR LES AUTRES SE'CTIONS.

* Art. 146. Fig. 77. 78. 79. 80. Ayant trouvé * un de leurs diametres *Aa*, & décrit sur ce diamêtre de part ou d'autre un arc de cercle *ANa* capable de l'angle donné ou de son complement à deux droits; on menera du point *N* où il rencontre la Séc-

tion, aux deux extremités *A*, *a*, du diametre *Aa*, les lignes *NA*, *Na*; par les milieux desquelles *O*, *Q*, & par le centre *C*, on tirera deux diametres *Mm*, *Ss*. Je dis que chacun de ses diametres sera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne *AN* terminée par la Section, étant coupée en deux également au point *O* par le diametre *Mm*, elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. Or le diametre *Mm* est parallele à la ligne *Na*, puisqu'il divise par le milieu aux points *C*, *O*, les lignes *Aa*, *AN*; & partant l'angle *mOA* que fait le diametre *Mm* avec son ordonnée *AO*, sera égal à l'angle *aNA*, qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. On prouvera de même que le diametre *Ss* fait avec son ordonnée *QN* un angle égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. Donc &c. *Art. 144.

Il est visible 1°. Que le diametre *Ss* est * conjugué au diametre *Mm*; puisqu'il est parallele à son ordonnée *ON*. 2°. Que les diametres conjugués *Mm*, *Ss*, deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. *Def. 12, II. & 14, III. * Art. 58. & 128.

PROPOSITION XII.

Problême.

161. UN *diametre d'une Section Conique étant donné, avec son parametre, & la position de ses ordonnées, & sçachant de plus si c'est un premier ou second diametre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une methode uniforme pour toutes les trois.*

PREMIERE MANIE'RE.

Pour la Parabole. Ayant trouvé * l'axe *AP*, son origine *A*, & son parametre *AG* que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point *G* une ligne droite indéfinie *DD* perpendiculaire à *PG*. *Art. 27. FIG. 81.

On fera mouvoir ensuite une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toûjours parallelement à *AG*, en entraînant par son extremité *D* le côté *DA* de l'angle droit *DAM*, mobile sur son sommet *A* autour de l'origine *A* de l'axe *AP*. Je dis que l'intersection continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant *MP* perpendiculaire à l'axe, les triangles réctangles *AGD*, *MPA*, seront semblables; puisque chacun des angles *GAD*, *PMA*, étant joint à l'angle *PAM*, vaut un droit. On aura donc *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*. D'où il suit que $\overline{PM}^2 = GA \times AP$; & qu'ainsi *PM* est une * ordonnée à l'axe *AP*.

* Art. 7.

On a déja donné cette construction dans le Livre premier article 19, d'une maniere qui convient à tous les diametres: On ne la repete ici, & on ne la restraint à l'axe, que pour en faire voir la liaison & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Séctions.

Pour les autres Séctions. Ayant trouvé entre le diametre donné & son parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en sorte qu'elle soit parallele aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il est clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen desquels on cherchera * les deux axes, & ensuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

* Def. 13. II. & 15. III.
* Art. 64. & 128.

Fig. 82. 83. On prolongera dans l'Ellipse, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe *Aa* en *G*; en sorte que *aG* soit à *GA*, comme l'axe *Aa* est à son parametre. Ayant tiré par le point *G* une perpendiculaire indéfinie *DD* à l'axe *Aa*, on fera mouvoir le point *D* le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite *Da* mobile autour de l'extremité *a* de l'axe *Aa*, & le côté *DA* de l'angle droit *DAM* mobile sur son sommet *A* autour de l'autre extremité *A* de l'axe *Aa*. Je dis que l'intersection

continuelle M des lignes AM, aD, décrira dans ce mouvement la Section requise.

Car menant MP perpendiculaire sur l'axe Aa, les triangles semblables aPM, aGD, donnent $aP. PM :: aG. GD$. Or les triangles réctangles AGD, MPA, sont semblables; puisque chacun des angles GAD, PMA; étant joint à l'angle PAM, vaut un droit; Et partant $AP. PM :: GD. GA$. Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premieres raisons, par ceux de ces deux dernieres; on aura $aP \times PA. \overline{PM}^2 :: aG \times GD. GD \times GA :: aG. GA$, c'est à dire, comme l'axe Aa est à son parametre. Donc * &c. *Art. 41. & 81.

Il est à remarquer que plus le point D s'éloigne du point G sur la ligne DD; plus l'angle PaM augmente, & plus au contraire l'angle PAM diminuë; de sorte que les lignes aM, AM, deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & se coupent ensuite de l'autre côté de la ligne DD, où elles décrivent par leur intersection continuelle l'Hyperbole opposée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole, que le point a s'éloigne à l'infini du point A, ou (ce qui est la même chose) que l'axe Aa devienne infiniment grand; les lignes GA, Da, qui ne se rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles: ainsi cette derniere construction retombe dans le cas de la précédente. C'est pourquoi l'Ellipse ou l'Hyperbole deviendroit alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne AG; Et par consequent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole dont l'axe est infini: sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse.

SECONDE MANIÉRE.

Pour la Parabole. Soit un triangle isoscelle HAL, dont l'un des côtés AH soit situé sur le diametre donné AP prolongé indéfiniment de part & d'autre de son FIG. 84.

origine A, & l'autre côté AL sur la tangente indéfinie LAL qui passe par le point A. Soit conçuë sa base HL se mouvoir toûjours parallelement à elle-même en entraînant par l'une de ses extremités L la ligne indéfinie LM parallele à AP, & par l'autre extremité H la ligne HF parallele à AL & égale au parametre donné du diametre AP, laquelle entraîne aussi par son extremité F la droite FA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interséction continuelle M des deux droites FA, LM, décrit pendant que la ligne HL se meut dans l'angle HAL & son opposé ou sommet, la Parabole MAM qu'on demande.

Car menant l'ordonnée MP au diametre AP, les triangles semblables AHF, APM, donnent AH ou AL ou PM. HF :: AP. PM, & partant $\overline{PM}^2 = AP \times HF$. Donc * &c.

*Art. 7. & 10.

On doit observer que le point H doit tomber au delà de l'origine A du diametre AP; lorsque les points F, L, tombent de part & d'autre de ce diametre.

FIG. 85. 86. *Pour les autres Sections.* La construction est la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne LM doit tourner autour de l'autre extremité a du diametre donné Aa; au lieu que dans la Parabole elle lui est parallele. On suppose dans l'Hyperbole que le diametre donné est un premier diametre; car si c'étoit un second, on trouveroit selon l'article 115 du Livre troisiéme, le premier qui lui est conjugué & son parametre.

Car menant MP ordonnée au diametre Aa, les triangles semblables aPM, aAL, & APM, AHF, donnent aP. PM :: aA. AL ou AH. Et AP. PM :: AH. HF. Et partant, si l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premieres raisons par ceux des deux secondes, on aura $aP \times PA$. $\overline{PM}^2$ :: $aA \times AH$. $AH \times HF$ :: aA. HF. Donc * &c.

*Art. 41. 55. 81. & 118.

Il faut observer que les points H, a, doivent tomber de part & d'autre du point A dans l'Ellipse, & du même côté dans l'Hyperbole, lorsque les points F, L, tom-

bent de part & d'autre du diametre *Aa*.

COROLLAIRE I.

162. DE-LA on voit comment un diametre *Aa* étant donné avec une de ses ordonnées *PM*; on peut trouver son parametre *HF*. Car 1°. Dans la Parabole on prendra sur le diametre *AP* la partie *AH* égale à *PM*; & ayant tiré la ligne *HF* parallele à *PM*, & terminée en *F* par la ligne *AM* tirée de l'origine *A* du diametre par l'extremité *M* de l'ordonnée, il est clair que cette ligne *HF* sera le parametre du diametre *AP*. FIG. 84.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extremités *a* du diametre donné *Aa* la ligne *aM* qui rencontre la tangente *AL*, qui passe par l'autre extremité *A*, au point *L*; & ayant pris sur le diametre *Aa* la partie *AH* égale à *AL*, on tirera *HF* parallele à *PM*, laquelle rencontrant en *F* la ligne *AM*, sera le parametre du diametre *Aa*. FIG. 85. 86.

COROLLAIRE II.

163. ON tire de la seconde maniere qu'on vient d'expliquer, une methode uniforme & trés-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par plusieurs points. La voici dans l'Ellipse: & elle servira de Regle pour les autres Sections.

Ayant pris sur la tangente *AL*, qui passe par l'une des extremités *A* du diametre donné *Aa*, la partie *AG* égale à son parametre, & mené une parallele indéfinie *GF* à *Aa*; on tirera librement par le point *A* autant de lignes droites *AF*, *AF*, &c. qu'on voudra. Ayant pris sur la tangente indéfinie *AL*, les parties *AL*, *AL*, &c. égales aux correspondantes *GF*, *GF*, &c. & mené les droites *aL*, *aL*, &c; je dis que les intersections *M*, *M*, &c. des droites correspondantes *FA*, *La*, *FA*, *La*, &c. seront des points de l'Ellipse qui a pour diametre la ligne *Aa*, pour tangente la ligne *AL*, & pour parametre du FIG. 87.

diametre Aa la ligne AG. Cela est visible en menant FH parallele à AG, & tirant la ligne HL par le point L correspondant au point F. Car le triangle HAL sera isoscelle; puisque * AL est égale à GF ou AH, & HF sera égale au parametre du diametre Aa: c'est pourquoi cette construction retombe dans celle de la seconde des deux maniéres précédentes.

* Hyp.

Comme les lignes GF, AL, deviennent fort grandes, lorsqu'il s'agit de trouver des points M qui soient proches du point a; on pourra se servir, pour trouver ces points, de la tangente al qui passe par l'autre extremité a du diametre Aa, & de la ligne gf parallele à Aa, comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées MP, MP, &c. paralleles à la tangente AL, & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre Aa en M, M, &c, en sorte qu'elles soient coupées chacune en deux également par ce diametre; il est clair * que ces nouveaux points M, M, &c, seront encore à la même Ellipse.

* Art. 43.

On pourroit se servir d'une même ouverture de compas GF ou AL pour marquer sur les lignes GF, AL, autant de points F, F, &c, L, L, &c, qu'on voudra; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque GF seroit égale à la correspondante AL; ce qui est le fondement de la démonstration.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

FIG. 88. 89. 90. 91.

164. S'il *y a deux droites* MN, AR, *terminées par une Séction Conique, lesquelles se rencontrent en un point* P, *& qui soient paralleles à deux droites données de position; je dis que le réctangle* MP×PN *sera toûjours au réctangle* AP×PR *en raison donnée, en quelque endroit de la Séction que puissent tomber les droites* MN, AR.

POUR

POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig.* 88.) les tangentes CB, EB, qui se rencontrent au point B, paralleles aux droites MN, AR: je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{CB}^2 . \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point G milieu de MN le diametre CG, & tiré par son origine C la parallele CB à MN; il est clair * qu'elle sera tangente en C. On menera de la même sorte la tangente EB parallele à AR, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre CG au point K; & tirant par le point touchant E l'ordonnée EL, on aura * $KC = CL$; & par consequent $KB = BE$. On tirera ensuite AD ordonnée, & AF parallele au diametre CG, & on nommera les données KB ou BE, m; BC, n; CK, e; le parametre CH du diametre CG, p; & les indéterminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

*Art. 148. *Art. 10. & 21. *Art. 22. & 23.

Cela posé, les triangles semblables KBC, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$: Et par consequent $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} + r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r$; $MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $CD(s) . CG(\frac{ex}{m} + s) :: \overline{AD}^2(rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{err}{ms}x = rr + \frac{ep}{m}x$, puisque $\overline{AD}^2 (rr) \overset{*}{=} CD \times CH (ps)$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne AR tombe au dessus du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

*Art. 8. & 20. *Art. 6.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$. D'où l'on tire $x = \frac{emp}{nn} - \frac{2mr}{n} = AR$; puiſque PM (y) devenant nulle ou zero, il eſt clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR = \frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$; & par conſequent $MP \times PN$ ($yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$). $AP \times PR$ ($\frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$) :: $\overline{CB}^2$ (nn). $\overline{EB}^2$ (mm). puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on retrouve l'équation précedente. Or comme les tangentes CB, BE demeurent toûjours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'enſuit &c.

Il peut arriver differens cas, ſelon les differentes poſitions des droites MN, AR; mais comme la démonſtration demeure toûjours la même, & qu'il ne peut y avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans quelques termes qui s'évanoüiſſent, je ne m'arrêterai point à les expliquer en détail. On doit obſerver la même choſe dans les deux autres Sections.

POUR LES AUTRES SE'CTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89. 90. 91.) les deux demi-diametres CO, CB, paralleles aux droites MN, AR; je dis que $MP \times PN$. $AP \times PR$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{CB}^2$.

Soit mené le diametre CG qui ait pour double ordonnée MN, ſur lequel ſoient abaiſſées les droites BE, AD, paralleles à MN; & ayant tiré AF parallele à CG, ſoient nommées les données CB, m; BE, n; CE, e; & le demi-diametre CK, t; ſon demi-conjugué CO, c; & les interminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

Cela poſé, les triangles ſemblables CBE, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Par conſéquent dans l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 90. & 91.) on aura $CG = \frac{ex}{m} \pm s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} - r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$; $MP \times PN$

$= yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry$, $GM^2 = yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry + \frac{nn}{mm} xx - \frac{2nr}{m} x + rr$. Or * $\overline{CD}^2 \mp \overline{CK}^2 (ss \mp tt) . \overline{CG}^2 \mp \overline{CK}^2$ (* Art. 82. & 118.) $\left(\frac{eexx}{mm} \pm \frac{2esx}{m} + ss \mp tt \right) :: \overline{AD}^2 (rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{eerrxx \pm 2emrrsx}{mmss \mp mmtt} = rr + \frac{eeccxx \pm 2eccmsx}{mmtt}$, en mettant pour $\frac{rr}{ss \mp tt}$ sa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant ensemble ces (* Art. 82. & 118.) deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt} xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt} x = 0$, dans laquelle mettant à la place de $nntt - ccee$ sa valeur $cctt$ (il faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe * par l'extremité B, lorsque CB est la moitié d'un second diametre) (* Art. 134.) tirée de ce que * $\overline{CE}^2 + \overline{CK}^2 (ee + tt) . \overline{EB}^2 (nn) :: \overline{CK}^2 (tt) . \overline{CO}^2 (cc)$. (* Art. 81. & 118.) on aura celle-ci $yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry + \frac{cc}{mm} xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt} x = 0$, qui convient à tous les points de la Séction, lorsque les points A, R, tombent de part & d'autre du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre) $\frac{cc}{mm} xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt} x = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnrtt \pm 2ccems}{cctt} = AR$; puisque PM (y) devenant nulle ou zero, il est clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR$ $\left(\frac{2mnrtt \pm 2mcces}{cctt} x - xx \right) . MP \times PN \left(yy + \frac{2nx}{m} y - 2ry \right) :: \overline{CB}^2 (mm) . \overline{CO}^2 (cc)$. Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres CO, CB, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Séction que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'ensuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipse, parce qu'il ne differe de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes. Oij

COROLLAIRE I.

FIG. 92. 165. S'IL y a deux lignes droites MN, AR, terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites FG, BD, paralleles aux deux premieres, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point Q: il est clair que $MP \times PN$. $AP \times PR$ :: $FQ \times QG$. $BQ \times QD$. Car les deux droites AR, BD, étant paralleles entr'elles, seront paralleles à la même droite CZ donnée de position; comme aussi les deux droites MN, FG, à la même droite CY donnée pareillement de position.

COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles AR, BD, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points E, Q, une ligne droite FG terminée par la même Section; je dis que $FE \times EG$. $AE \times ER$ :: $FQ \times QG$. $BQ \times QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que MN tombe sur FG, il est clair que les réctangles $MP \times PN$, $AP \times PR$, deviennent $FE \times EG$, $AE \times ER$.

COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93. 167. ON peut tirer de ce Theorême la proprieté du cercle, qui est si connuë de tous les Geometres; sçavoir que si par un point quelconque P pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra AR, MN, HL, &c. terminées par la circonference, les réctangles $AP \times PR$, $MP \times PN$, $HP \times PL$, &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres CB, CO, CD, &c. paralleles à ces lignes, il est clair par le Theorême, que tous ces réctangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la proprieté essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques A de la Parabole un diametre AF qui rencontre cette ligne au point F: je dis que le rectangle $MF \times FN$ est égal au rectangle de AF par le parametre CH du diametre CG, qui passe par le milieu de MN. FIG. 94.

Car concevant dans le Theorême que AP tombe sur AF, il est clair que la ligne PF ($\frac{n}{m}x$) devient nulle ou zero, & qu'ainsi $\frac{n}{m} = o$. C'est pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = o$, tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, on en formera celle-ci $yy + 2ry - \frac{ep}{m}x = o$. Or $AF = \frac{ex}{m}$, $CH = p$, & $MF \times FN = yy + 2ry$. Donc &c.

Ce n'est que pour faire voir la généralité du Theorême, que j'en déduis cette proprieté; car on la peut démontrer plus aisément sans y avoir recours, en cette sorte. $\overline{GM}^2 = GC \times CH$, $\overline{AD}^2$ ou $\overline{GF}^2 = DC \times CH$, & partant $\overline{GM}^2 - \overline{GF}^2$ ou $MF \times FN = \overline{GC - DC} \times CH = AF \times CH$.

COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LA il est évident,

1°. Que s'il y a deux droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de cette Parabole, deux diametres AF, BP, qui rencontrent ces lignes aux points F, P: il est évident, dis-je, que $MF \times FN . EP \times PL :: AF . BP$. Car le diametre CG qui passe par le milieu de MN, passe aussi par le milieu

de EL; & par consequent le réctangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ses diametres AF, BK, aux points F, K; on aura $MF \times FN$. $MK \times KN$ :: AF. BK.

3°. Que s'il y a deux lignes droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles, qui rencontrent un de ses diametres quelconques BP aux points K, P; on aura $MK \times KN$. $EP \times PL$ :: BK. BP.

COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui passe par trois points donnés A, M, N, & dont les diametres AF, CG, soient paralleles à une ligne droite donnée de position; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car ayant mené une ligne MN qui joigne deux des points donnés M, N; on tirera par le troisiéme A un diametre AF parallele à la ligne donnée de position, & qui rencontre la ligne MN au point F, & par le point de milieu G de MN une parallele GC à AF. On fera ensuite $MF \times FN$. $MG \times GN$. ou $\overline{GM}^2$ :: AF. GC. Et ayant pris CH troisiéme proportionnelle à CG, GM, on décrira * du parametre CH, & du diametre CG dont l'origine est en C, une Parabole dont les ordonnées soient paralleles à MN; elle satisfera à la question.

* Art. 29. & 30.

Car 1°. Elle passera * par les points M, N; puisque par la construction $CH \times CG = \overline{GM}^2$ ou $\overline{GN}^2$. 2°. Elle passera par le point A; puisque $MG \times GN$. $MF \times FN$ :: CG. FA. 3°. Les diametres AF, CG, seront paralleles à la droite donnée de position.

* Art. 7. & 20.

Comme la Parabole qui satisfait au Problême, a necessairement pour diametre la ligne CG, qui a pour origine le point C, & pour parametre la ligne determinée CH; il s'ensuit qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. S'IL y a deux droites AR, MN, terminées par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'ayant fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2.$ on tire la ligne AF: je dis que cette ligne sera un diametre. Car ayant mené les tangentes CB, EB, paralleles aux droites MN, AR, & par le point touchant C le diametre CG qui rencontre EB prolongée en K; on aura $\overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2. \overline{BC}^2 :: AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$, & par consequent $KB. CB :: AP. PF.$ Les triangles KBC, APF seront donc semblables, & leurs côtés AF, KC, paralleles entr'eux: d'où il suit que la ligne AF qui se trouve ainsi parallele au diametre CG, sera un diametre; puisque dans la Parabole * tous les diametres sont paralleles entr'eux. FIG. 88. * Def. 7. I.

COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

172. ON tire du Corollaire précédent une maniére de décrire une Parabole qui passe par quatre points donnés A, M, R, N.

Car ayant joint ces quatre points par deux droites AR, MN, qui s'entrecoupent en un point P, & fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$; on tirera la ligne AF, & on décrira * une Parabole qui passe par les trois points A, M, N, & dont les diametres soient paralleles à la ligne AF. Elle sera celle qu'on demande; car selon le Theorême la ligne AP doit rencontrer cette Parabole en un point R, tel que $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2. \overline{BC}^2 :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$. * Art. 170.

Si l'on eut pris le point F de l'autre côté du point P, on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorsqu'un de ces points F tombe sur l'un des FIG. 95.

points donnés M ou N, il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse ; & que lorsque tous les deux tombent sur les points M, N, il n'y en peut avoir aucune : puisqu'alors le diametre AF de la Parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré * être impossible.

*Art. 10.

COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

FIG. 96, 97. 173. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote CB au point Q, & qui soit parallele à une ligne donnée de position ; & qu'on tire par un point quelconque A de la Section une droite AP parallele à cette asymptote, & qui rencontre au point P la ligne MN : je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toûjours au rectangle $2AP \times PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP.

Car concevant dans le Theorême (*fig.* 90. 91.) que le demi-diametre CB devienne une asymptote, il est clair * qu'alors les trois côtés du triangle CBE deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (*fig.* 96. 97.) par l'extremité K du diametre LK qui passe par le milieu de MN, une parallele KS à MN, qui rencontre l'asymptote CB en S, on formera un triangle CKS dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle CBE ; & partant on aura CK (t). KS ou * CO (c) :: CE (e). EB (n). Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on met à la place de ce sa valeur nt dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2eecs}{mtt}x = 0$ que l'on a trouvée dans le Theorême, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt \mp 2ncs}{mt}x = 0$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt \mp 2ncs}{mt}x$. Or en prolongeant AD, s'il est necessaire,

* Art. 102.
* Art. 113.

ceſſaire, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote CB en H, les triangles ſemblables CKS, CDH, donneront $CK\,(t)$. $KS\,(c)$ :: $CD\,(s)$. $DH = \frac{cs}{t}$. Et partant AH ou $PQ = \frac{rt \pm cs}{t}$. On aura donc $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry)$. $2AP \times PQ$ $(\frac{2rt \pm 2cs}{t}x)$ :: $EB\,(n)$. $CB\,(m)$ :: KS. CS. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes KS, CS, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP; parce que le diametre ZK qui paſſe par le milieu de MN, paſſe auſſi* par le milieu de toutes les paralleles à MN terminées par la Section, en quelque endroit qu'elles ſe rencontrent. Donc &c. * Art. 145.

On peut démontrer ce Corollaire immediatement, & ſans avoir recours au Theorême, en cette ſorte. Soient les données $CK = t$, KS ou $CO = c$, $CS = m$, & les indéterminées $CD = s$, AD ou $DI = r$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles ſemblables CSK, APF, donnent $PF = \frac{cx}{m}$, AF ou $DG = \frac{tx}{m}$; Et partant GM ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{tx}{m} + s$. Or à cauſe des triangles ſemblables CKS, CDH, CGQ, on aura $CK\,(t)$. $KS\,(c)$ :: $CD\,(s)$. $DH = \frac{cs}{t}$ :: $CG\,(\frac{tx}{m} + s)$. $GQ = \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \times QN$ ou $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2 = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{ccss}{tt} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2crx}{m} - rr =$ * $AH \times HI$ ou $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{ccss}{tt} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{ccss}{tt} - rr$, & tranſpoſant d'une part tous les termes où y ſe rencontre) cette équation $yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{2crx}{m}$, laquelle étant reduite en proportion, donne $MP \times PN$ $(yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry)$. $2AP \times PQ$ FIG. 96. * Art. 97.

P

$(\frac{2csx}{s} \mp 2rx) :: KS(c). CS(m)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La démonſtration eſt la même pour les Hyperboles oppoſées à quelques ſignes prés.

COROLLAIRE X.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

FIG. 98. 174. IL ſuit du Corollaire précédent,

1°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section deux paralleles AP, BD, à l'aſymptote CS, qui rencontrent ces lignes aux points P, D: les réctangles $MP \times PN$, $2AP \times PQ$ ſeront entr'eux, comme les réctangles $HD \times DG$, $2BD \times DI$; & partant on aura $MP \times PN. HD \times DG :: AP \times PQ. BD \times DI$.

2°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par un point quelconque A de la Section, une parallele AO à CS, qui rencontre ces lignes aux points P, O: on aura (en concevant dans le cas précédent que BD tombe ſur AP) cette proportion, $MP \times PN. HO \times OG :: AP \times PQ. AO \times OI :: AP. AO.$ puiſque $PQ = OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite HG terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontre une aſymptote CS en I; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section A, B, deux paralleles AO, BD, à CS, qui rencontrent cette ligne aux points O, D: on aura $HO \times OG. HD \times DG :: AO \times OI. BD \times DI$. Cela eſt encore une ſuite du premier cas, en concevant que la ligne MN tombe ſur HG.

COROLLAIRE XI.

175. Si l'on conçoit qu'une ligne droite BD qui rencontre une Séction Conique en deux points B, D, se meuve parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rase la Séction, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente LS: il est clair que les deux points d'intersection B, D, se réünissent alors au point touchant L; & qu'ainsi on peut considerer un point touchant comme deux points d'intersection qui tombent l'un sur l'autre. Or cela posé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, plusieurs cas dont voici les principaux. Fig. 92.

1°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, & deux autres droites MN, AR, paralleles à ces tangentes & terminées par la Séction, lesquelles se rencontrent en un point P; je dis que $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{KS}^2. \overline{LS}^2$. Ceci a été démontré dans le Theorême à l'égard de la Parabole : mais pour les autres Séctions, concevant dans le premier Corollaire que FG tombe sur la tangente KS, & BD sur LS; il est clair que les deux points d'interséction F, G, se réünissent au point touchant K, comme aussi les deux B, D, au point touchant L; & qu'ainsi les réctangles $FQ \times QG$, $BQ \times QD$, deviennent les quarrez $\overline{KS}^2. \overline{LS}^2$.

2°. Si dans une Ellipse ou dans des Hyperboles opposées, l'on mene une tangente TX parallele à KS, & qui rencontre SL au point X, on prouvera comme dans le nombre précédent, que $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{TX}^2. \overline{LX}^2$. D'où il suit que $\overline{KS}^2. \overline{LS}^2 :: \overline{TX}^2. \overline{LX}^2$. Et $KS. SL :: TX. LX$. C'est à dire, que si deux tangentes paralleles KS, TX, rencontrent une troisiéme tangente LS aux points S, X, on aura $KS. LS :: TX. LX$. ou $KS. TX :: LS. LX$.

3°. Si dans une Ellipse, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles opposées, il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, & qu'on mene

deux demi-diametres CY, CZ paralleles à ces tangentes; je dis qu'elles seront entr'elles comme ces deux demi-diametres. Car selon le Theorême $\overline{CY}^2 . \overline{CZ}^2 :: MP\times PN . AP\times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$, selon le nombre premier. Et par consequent $CY . CZ :: KS . LS$.

4°. S'il y a deux droites AR, FG, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent deux tangentes KI, LO, qui leur soient paralleles aux points I, O; je dis que $FO\times OG . \overline{LO}^2 :: \overline{KI}^2 . AI\times IR$. Ce qui est évident en concevant dans le premier Corollaire que BD devient la tangente LO; & MN, la tangente KI.

5°. S'il y a deux paralleles AR, BD, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent une tangente KH aux points I, H; je dis que $\overline{KI}^2 . AI\times IR :: \overline{KH}^2 . BH\times HD$, ou $\overline{KI}^2 . \overline{KH}^2 :: AI\times IR . BH\times HD$. Ce qui est une suite du second Corollaire, en concevant que la ligne FG tombe sur la tangente KH.

6°. Si l'on suppose dans le nombre précédent que la Section Conique soit une Hyperbole, & que la tangente HK en soit une asymptote; les réctangles $BH\times HD$, $AI\times IR$ deviendront égaux entr'eux. Car le point touchant K sera * alors infiniment éloigné des points H, I; & par consequent les droites infinies HK, IK, qui ne different entr'elles que d'une grandeur finie HI, doivent être regardées comme égales. Ceci a déja été démontré dans l'article 97. & on ne le repete ici que pour servir de preuve à ce que l'on vient de dire, & pour faire voir qu'on arrive souvent aux mêmes verités par des routes bien differentes.

* Art. 108.

7°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, avec une ligne droite AR terminée par la Section, parallele à l'une d'elles LS, & qui rencontre l'autre KS en un point I; je dis que $\overline{KI}^2 . AI\times IR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Cela est visible en concevant dans le second Corollaire que les lignes FG, BD, tombent sur les tangentes KS, LS.

8°. S'il y a dans une Ellipse ou dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles KI, TV, qui rencontrent aux points I, V, une ligne AR terminée par la Section aux points R, A; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{TV}^2 . RV \times VA$. Cela suit encore du second Corollaire en imaginant que les paralleles MN, FG, tombent sur les tangentes TV, KI.

9°. S'il y a dans une Parabole deux paralleles MN, CH, dont l'une soit tangente en C, & l'autre soit terminée par la Parabole; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux diametres AF, BO qui rencontrent ces lignes aux points F, O: il est clair en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire sixiéme que EL tombe sur la tangente CH; 1°. Que $MF \times FN . \overline{CO}^2 :: AF . BO$. 2°. Que si l'on prolonge FA jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente CH en Q, on aura $MF \times FN . \overline{CQ}^2 :: AF . AQ$. FIG. 94.

10°. S'il y a deux paralleles MN, KT, dont l'une KT touche une Hyperbole en K & rencontre une de ses asymptotes en S, & l'autre MN est terminée par l'une ou par l'autre des Hyperboles opposées, & rencontre la même asymptote en Q; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AP, BT, à l'asymptote CS, lesquelles rencontrent ces lignes aux points P, T; on aura (en concevant dans les trois nombres du Corollaire dixiéme, que la secante GH tombe sur la tangente RT) 1°. Le rectangle $MP \times PN . \overline{KT}^2 :: AP \times PQ . BT \times TS$. 2°. En prolongeant PA jusqu'à ce qu'elle rencontre KT en R, le rectangle $MP \times PN . \overline{KR}^2 :: AP . AR$. 3°. Le quarré $\overline{KT}^2 . \overline{KR}^2 :: BT \times TS . AR \times RS$. FIG. 98.

11°. S'il y a dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles KR, LF, qui rencontrent une asymptote CS aux points S, V; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AR, BF à l'asymptote CS lesquelles rencontrent ces tangentes

aux points R, F: on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixiéme, que les deux Secantes MN, GH, tombent sur les deux tangentes KR, LF) 1°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LF}^2 :: AR \times RS . BF \times FV$. 2°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LE}^2 :: AR . AE$.

PROPOSITION XIV.

Problême.

FIG. 99. 100. & 101. 176. DÉCRIRE *une Ellipse ou deux Hyperboles opposées autour d'un parallélogramme donné* FGHK, *& dont l'un de ses diametres* AB *parallele aux deux côtez* FK, GH, *soit à son conjugué* DE, *en la raison donnée de* m *à* n.

Ayant mené les lignes AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme donné $FGHK$, il est clair * qu'elles seront sur deux diametres conjugués de la Séction qu'on demande, & qu'ainsi leur point d'interséction en sera le centre; puisque selon l'une des conditions du Problême, les paralleles FG, KH, doivent être terminées par la Séction, aussi-bien que les deux autres paralleles FK, GH. Or cela posé, si l'on prend AB, DE, pour ces deux diametres conjugués, & qu'on nomme (les points L, O, coupent en deux parties égales les lignes FG, KH,) les données CL ou CO, a; LF ou OK, b; & l'inconnuë CA ou CB, t; on aura. 1°. Lorsque * la Séction est une Ellipse, $BL \times LA$ $(tt - aa)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm. nn$. Et partant $tt = aa + \frac{mmbb}{nn}$. 2°. Lorsque * la Séction doit être deux Hyperboles opposées, $\overline{CL}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(aa \mp tt)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm. nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$; sçavoir $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorsque la ligne AB est un premier diametre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorsque c'est un second. D'où l'on tire la construction sui-

* Art. 146.

* Art. 41. & 55.

* Art. 81. & 118.

vante que je distingue en trois differens cas.

Premier cas. Lorsque la Séction est une Ellipse; soit fait un triangle réctangle VST dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & soit décrit du demi diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, une Ellipse: Je dis qu'elle satisfera au Problême. Car 1°. Le diametre AB parallele aux côtés FK, GH, est à son conjugué DE, en la raison donnée de m à n. 2°. A cause du triangle TSV réctangle en S, le quarré $\overline{TV}^2$ ou $\overline{CA}^2 (tt) = \overline{TS}^2 (aa) + \overline{SV}^2 \left(\frac{mmbb}{nn}\right)$; & partant $BL \times LA (tt - aa) = \frac{mmbb}{nn}$: c'est pourquoi l'on aura $BL \times LA \left(\frac{mmbb}{nn}\right)$. $\overline{LF}^2 (bb) :: mm. nn :: \overline{AB}^2. \overline{DE}^2$. D'où l'on voit que LF est une ordonnée au diametre AB; & qu'ainsi la Séction passe par le point F. On prouvera de même que la Séction passera par les points G, H, K; puisque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

Second cas. Lorsque la Séction doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus grande que $\frac{m}{n} LF$: soit formé un triangle TSV réctangle en S, dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothenuse $VT = CL$; & soient décrites du premier demi-diametre $CA = TS$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

Troisiéme cas. Lorsque la Séction doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle TSV réctangle en T dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothenuse $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira ensuite du second demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est semblable à celle du premier; mais il faut remarquer que

lorsque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problême est impossible.

COROLLAIRE I.

177. COMME la position des deux diametres conjugués AB, DE, est déterminée, aussi-bien que leur grandeur; puisque selon les conditions du Problême ils doivent couper par le milieu les côtés opposés du parallelogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diametre CA ou CB qu'une seule valeur: il s'ensuit qu'il ne peut y avoir qu'une seule Section qui satisfasse.

COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallelogramme donné $FGHK$, & qui passe par un point donné M.

Car ayant mené les deux diametres conjugués AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme, & du point donné M l'ordonnée MP au diametre AB, laquelle rencontre les côtés opposés FK, GH, aux points R, Q, & la Section (que je suppose décrite) au point N; il est clair que $PN = PM$, & qu'ainsi $RN = QM$, puisque $PR = PQ$. Le réctangle $RM \times MQ$ sera donc égal au réctangle $RM \times RN$.
* Art. 164. Or * $FR \times RK . MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. Et par consequent la raison du diametre AB parallele aux côtés FK, GH, à son conjugué DE, est donnée; puisque les réctangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, sont donnés. De plus la Section sera une Ellipse, lorsqu'entre les deux ordonnées MP, KO, au diametre AB, qui tombent du même côté du centre C, celle qui est la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée; & au contraire deux Hyperboles opposées, lorsqu'elle est plus petite. D'où l'on voit que cette question se reduit au Problême précedent.

Si

Si le point donné M tomboit ſur l'un des côtés du parallélogramme, prolongé à diſcrétion; il eſt clair que ce Problême ſeroit alors impoſſible, puiſque ce côté rencontreroit la Section en trois differens points; ce qui ne peut * être. *Art. 149.

COROLLAIRE III.

179. DE-LA on tire encore la maniére de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne AB donnée de poſition, pour centre le point donné C, & pour deux ordonnées à ce diametre les droites MP, KO.

Car ayant pris ſur le diametre AB la partie CL égale à CO, & mené LF parallele & égale à OK; il eſt clair qu'elle ſera * une ordonnée au diametre AB, *Art. 45. 55. 85. & 118. & qu'ainſi prolongeant KO en H, & FL en G, en ſorte que $OH = OK$, & $LG = LF$, les droites égales & paralleles KH, FG, ſeront * deux doubles ordonnées *Art. 144. au diametre AB. D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallélogramme $FGHK$, & paſſer par le point donné M; ce qui ſe fera par le moyen du Corollaire précédent.

Comme cette queſtion ſe reduit à celle du Corollaire précédent, qui ſe reduit au Problême; & que ſelon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une ſeule Section qui y ſatisfaſſe: il s'enſuit de même qu'on ne peut décrire qu'une ſeule Section qui rempliſſe les conditions de ce dernier Corollaire.

PROPOSITION XV.

Problême.

180. DECRIRE *une Section Conique qui paſſe par cinq points donnés* F, M, K, G, N; *& démontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une ſeule.* FIG. 102. 103.

Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites *FG*, *MN*, qui se rencontrent au point *R*, on menera par le cinquiéme point donné *K* deux droites *KD*, *KH*, paralleles aux droites *FG*, *MN*, & qui les rencontrent aux points *E*, *Q*. On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est necessaire, les points *D*, *H*, tels que $MR \times RN.\ GR \times RF :: ME \times EN.\ KE \times ED$. Et $FR \times RG.\ MR \times RN :: FQ \times QG.\ HQ \times QK$. en observant que les points *K*, *D*, ou *K*, *H*, doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre *E*, ou *Q*, lorsque les points *M*, *N*, ou *F*, *G*, tombent aussi de part & d'autre de ce même point ; & au contraire. On menera ensuite par les points de milieu des paralleles *DK*, *FG*, & *MN*, *KH*, les droites *LI*, *AB*, qui s'entre-
* *Art.* 179. coupent au point *C*. On décrira enfin * la Séction Conique qui a pour diametre la ligne *AB* donnée de position, pour centre le point donné *C*, & pour ordonnées les deux droites *MP*, *KO*. Je dis qu'elle satisfera au Problême, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* *Art.* 166. Car les deux points *D*, *H*, seront * à la Séction qui passe par les cinq points donnés *F*, *M*, *K*, *G*, *N* ; &
* *Art.* 146. & 147. ainsi les lignes *LI*, *AB*, en seront * deux diametres, qui en détermineront par consequent le centre par leur point d'intersection *C*. Il est donc évident que la Séction Conique qui passe par les cinq points donnés, doit avoir necessairement pour diametre la ligne *AB* donnée de position, pour centre le point *C*, & pour ordonnées au diametre *AB* les droites *MP*, *KO*. Or comme il n'y a qu'une seule Séction Conique qui puisse remplir ces conditions, il s'ensuit que ce sera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

S'il arrive que les diametres *AB*, *LI*, soient paral-
* *Art.* 147. leles entr'eux ; la Séction sera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

LIVRE CINQUIÉME.

De la comparaison des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.

LEMME I.

181. S*i la difference de deux quantités diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car si elles ne l'étoient pas, on pourroit assigner entr'elles quelque difference; ce qui est contre l'hypothese.

LEMME II.

182. S*i la raison de deux quantités est telle que l'antecedent demeurant toûjours le même, sa difference avec son consequent diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car par le Lemme* précédent, l'antecedent sera égal à son consequent; & ainsi les quantités dont ils expriment le rapport, seront égales. **Art. 181.*

LEMME III.

183. S*i l'on suppose sur une ligne courbe quelconque* ABG *un arc* MN *infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées* MP, NQ, *à l'axe ou diametre* AC, *avec les paralleles* MR, NS, *à ce diametre: je dis que les parallélogrammes* PQRM, PQNS, *peuvent être pris chacun pour l'espace* PQNM *renfermé entre les ordonnées* PM, QN, *la petite droite* PQ, *& le petit arc de la courbe* MN. FIG. 104.

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent

continuellement de plus en plus de ſon diametre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus ; ou enfin cette ligne courbe eſt compoſée de pluſieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de ſon diametre. Car il eſt évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points ſoient également éloignés de ſon diametre ; puiſqu'alors cette portion ne ſeroit plus courbe, mais une ligne droite parallele à ce diametre.

Suppoſons 1°. Que l'arc MN ſoit ſur une courbe AMB dont tous les points s'éloignent de plus en plus de ſon diametre AC. Si l'on prend du côté du point N l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'ayant mené l'ordonnée OF parallele à MP, on tire les droites OD, ME, paralleles au diametre AC; il eſt clair que l'eſpace curviligne $PFOM$ ſera plus grand que le parallelogramme inſcrit $PFEM$, & moindre que le parallelogramme circonſcrit $PFOD$. Or ſi l'on imagine que le point O ſe meuve ſuivant la courbe vers le point M, il eſt viſible que le parallelogramme $MEOD$ qui eſt la difference des parallelogrammes inſcrits & circonſcrits à l'arc OM, diminuëra continuellement juſqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zero dans l'inſtant que le point O parvient en M. D'où il ſuit que lorſque le point O eſt arrivé en N, c'eſt à dire, infiniment prés de M, le parallelogramme $MEOD$, qui devient $MRNS$, ſera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il eſt donc évident ſelon le Lemme * premier, que les parallelogrammes $PQRM$, $PQNS$, deviennent alors égaux entr'eux ; & par conſequent auſſi égaux chacun à l'eſpace curviligne $PQNM$. Donc &c.

* Art. 181.

Suppoſons 2°. Que le petit arc MN ſoit ſur une courbe BMG dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de ſon diametre CG. Il eſt viſible que la démonſtration demeure la même que pour le premier cas, en obſervant ſimplement que le parallelogramme

circonſcrit *PQNS* devient inſcrit dans ce cas-ci.

Suppoſons 3°. Qu'une ligne courbe telle que *ABG*, ſoit compoſée de pluſieurs portions dont les unes, comme *AB*, s'éloignent de plus en plus du diametre *AG*; & les autres au contraire, comme *BG*, s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme *B*, qui ſéparent ces portions, ne peuvent tomber ſur les arcs *MN*: car ſi cela étoit le point *B* ſeroit plus prés du point *M* que n'eſt le point *N*; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Il eſt donc évident que ce dernier cas eſt neceſſairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

COROLLAIRE I.

184 DE-LA il ſuit que ſi l'on mene par tout où l'on voudra une ordonnée *CB* parallele à *PM*, & qu'on imagine que la portion de courbe *AB* ſoit diviſée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que *MN*; l'eſpace *ACB* renfermé par les droites *AC*, *CB*, & par la portion de courbe *AB*, ſera égal à la ſomme de tous les parallelogrammes tels que *PQRM* ou *PQNS*. Il s'enſuit de même que l'eſpace *MPCB* renfermé par les droites *MP*, *PC*, *CB*, & par la portion de courbe *MB*, ſera égal à la ſomme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet eſpace; & de même dans toute l'étenduë de la courbe *ABG*.

COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque *CMDOC* renfermée entre deux paralleles *CE*, *DF*, & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites *MO*, *NL*, infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur ſoient auſſi paralleles; je dis que l'eſpace *OMNL* qu'elles couperont dans la figure *CMDOC*, ſera égal au rectangle d'une d'elles, comme de *MO*, par leur diſtance *MR* ou *OS*. Car menant la perpendicu- FIG. 105.

laire AB sur les paralleles CE, DF, laquelle rencontre les paralleles MO, NL, aux points P, Q; il est
*Art. 183. clair par le Lemme * que l'espace $PMNQ$ est égal au réctangle $PMRQ$, & l'espace $POLQ$ au réctangle $POSQ$; & par consequent que l'espace $OMNL$ est égal au réctangle $OMRS$ ou $OM \times PQ$.

COROLLAIRE III.

186. Il suit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques $CMDOC$, $EGFHE$ renfermées entre deux paralleles CE, DF, & qui soient telles qu'ayant mené entre ces paralleles par tout où l'on voudra une ligne MH paralleles aux droites CE, DF; les parties MO, GH, de cette ligne comprises dans les figures $CMDOC$, $EGFHE$, soient toûjours entr'elles en raison donnée: il suit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les espaces qu'elles comprennent) sont aussi entr'elles en raison donnée. Car imaginant une autre parallele NK infiniment proche de MH, & tirant une perpendiculaire AB sur les paralleles CE, DF, laquelle rencontre les paralleles MH, NK, aux
*Art. 185. points P, Q; il est clair par le Corollaire * précédent que l'espace $OMNL$ est égal au rectangle $OM \times PQ$, & de même que l'espace $GHKI$ est égal au réctangle $GH \times PQ$. Ces deux espaces seront donc entr'eux comme MO est à GH; & comme cela arrive toûjours en quelque endroit qu'on mene la droite MH, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces $MNLO$, c'est à dire, l'espace $CMDOC$ sera à la somme de tous les petits espaces $GHKI$, c'est à dire, à l'espace $EGFHE$, en la raison donnée.

On prouvera de même que la partie MDO de la figure $CMDOC$, est encore à la partie correspondante GFH de l'autre figure $EGFHE$, en la raison donnée : comme aussi les parties restantes CMO, EGH.

Il est visible que si la raison donnée est celle d'égalité,

c'eſt à dire, que ſi les parties *MO*, *GH*, de la droite *MH*, ſont toûjours égales entr'elles ; les eſpaces *CMDOC*, *EGFHE*, & leur parties correſpondantes *MDO*, *GFH*, & *CMO*, *EGH*, feront égales entr'elles.

LEMME IV.

187. *Si l'on ſuppoſe ſur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit* MN ; *& qu'on imagine les tangentes* MT, NT, *qui ſe rencontrent au point* T, *la ſoûtendante* MN, *& la droite* NS *perpendiculaire ſur* MT *prolongée : je dis qu'on peut prendre pour l'arc* MN *ſa ſoûtendante* MN, *ou la ſomme des deux tangentes* MT, NT, *ou enfin la droite* MS. FIG. 106.

Toute ligne courbe eſt néceſſairement ou toûjours concave vers un certain endroit, ou compoſée de pluſieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le ſont vers le côté oppoſé. Or les points qui ſeparent ces portions * ne peuvent point ſe trouver ſur les arcs infiniment petits *MN* : puiſqu'ils ſeroient plus prés du point *M* que n'eſt le point *N* ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. On peut donc toûjours ſuppoſer que l'arc *MN* fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui eſt toûjours concave vers un certain côté. * *Art.* 183. *n.* 3.

Maintenant ſi l'on prend ſur la courbe du côté du point *N*, l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'on tire la ſoûtendante *OM*, la tangente *OG*, & la parallele *OD* à *NS* : il eſt clair 1°. A cauſe du triangle *MDO* réctangle en *D*, que la tangente *MD* eſt moindre que la ſoûtendante *MO*, & à plus forte raiſon moindre que l'arc *MNO* ; de ſorte que l'arc *MNO* & ſa ſoûtendante *MO* ſont plus grands chacun que *MD*, & chacun moindre que la ſomme des deux tangentes *MG*, *OG*. 2°. A cauſe de la concavité de l'arc *MNO* vers le même côté, ſi l'on mene par un point quelconque *N* de l'arc *MO* une tangente *TR*, les points *T*, *R*, où elle rencontre les tangentes *MG*, *OG*, ſeront ſituez entre les points *M*, *G*, & *O*, *G* ; ainſi

l'angle OGD, qui eſt externe au triangle TGR, eſt plus grand que l'angle RTG ou NTS.

Ceci ſuppoſé, ſi l'on mene les droites ME, MF, paralleles aux tangentes OG, NT, & qui rencontrent la droite DO aux points E, F; & qu'on imagine que le point O ſe meuve ſuivant la courbe vers le point M: il eſt viſible que l'angle OGD, ou ſon égal EMD, diminuera continuellement juſqu'à ce qu'il s'évanoüiſſe dans l'inſtant que le point O parvient en M; puiſqu'alors la tangente OG ſe confond avec la tangente MD: d'où il ſuit que la ligne ME diminuë continuellement, juſqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à MD dans cet inſtant. Donc lorſque le point O eſt arrivé en N, c'eſt à dire, infiniment prés du point M, la ligne ME, alors en MF, ne ſera pour lors differente de la tangente MD, que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par con-
*Art. 182. ſequent * les lignes TN, TS, dont elles expriment le rapport, ſeront égales entr'elles. Les deux tangentes MT, TN, priſes enſemble, ſeront donc égales à la droite MS, comme auſſi à l'arc MN, & à la ſoûtendante MN. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

188. PUISQUE l'angle FMD, ou ſon égal NTS, eſt infiniment petit dans la ſuppoſition que le point N ſoit infiniment prés du point M, il s'enſuit que dans le triangle MTN, l'angle interne NMT, qui eſt moindre que l'exterieur NTS, ſera auſſi infiniment petit, c'eſt à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainſi on ne pourra mener par le point M aucune ligne droite qui tombe dans l'angle TMN. D'où l'on voit que ces deux lignes MT, NM, ſe confondent entr'elles, & qu'ainſi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui paſſe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROL.

COROLLAIRE II.

189. Si l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque ſoit diviſée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits tels que MN; il eſt clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs ſoûtendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe: puiſqu'elle * n'en differera en aucune maniere. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, ſeront les tangentes de cette courbe; puiſqu'ils paſſent chacun par deux de ſes points infiniment proches l'un de l'autre. * *Art.* 187.

REMARQUE.

190. On doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui ſont toûjours concaves dans toute leur étenduë vers le même côté, comme ſont * ces Sections: au lieu que cette derniere notion eſt generale pour toutes ſortes de lignes courbes. Auſſi eſt-ce elle qui ſert de fondement à la methode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'oſe aſſûrer être la plus ſimple & la plus generale qu'on puiſſe ſouhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre. * *Art.* 26. 61. 124.

DE'FINITIONS.

1.

Deux ſegmens de lignes courbes quelconques BAD, bad, ſont appellés *Semblables*; lorſqu'ayant inſcrit dans l'un d'eux une figure réctiligne quelconque $BMNOD$, on peut toûjours inſcrire dans l'autre une figure réctiligne ſemblable $bmnod$. FIG. 107. 108. 109.

2.

Deux Sections Coniques ſont appellées *Semblables*; lorſqu'ayant pris dans l'une d'elles un ſegment quelcon-

que *BAD*, on peut toûjours assigner dans l'autre un segment semblable *bad*.

3.

On appelle diametres *Semblables AP*, *ap*, dans differentes Sections Coniques, ceux qui font avec leurs ordonnées *PM*, *pm*, les mêmes angles *APM*, *apm*.

COROLLAIRE.

191. PLUS chacun des côtés *BM*, *MN*, &c. *bm*, *mn*, &c. devient petit; plus leur nombre augmente, & plus aussi les figures rectilignes semblables *BMNOD*, *bmnod*, approchent des segmens *BAD*, *bad*, ausquels elles sont inscrites; de sorte qu'elles leur deviennent enfin égales * lorsque chacun des côtés est infiniment petit, & que leur nombre par consequent est infini. D'où il suit que les segmens semblables *BAD*, *bad*, sont entr'eux comme les quarrés de leurs soûtendantes *BD*, *bd*, qui sont des côtés homologues; & les portions des courbes *BAD*, *bad*; comme ces soûtendantes.

* *Art.* 189.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 107. 192. SOIENT *deux Paraboles* AM, am, *qui ayent deux diametres semblables* AL, aL, *situés sur la même droite, en sorte que leurs ordonnées* PM, pm, *soient paralleles entr'elles; & soit marqué sur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe* L, *tel que* LA *soit à* La, *comme le parametre* AG *du diametre* AL *de la Parabole* AM, *est au parametre* ag *du diametre* aL *de la Parabole* am. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Parabole* AM, *une ligne droite* LM; *elle rencontrera l'autre Parabole* am *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée *MP*, & nommé les données *LA*, *a*; *La*, *b*; *AG*, *p*; & les indéterminées *AP*, *x*;

PM, y; on aura $LA\ (a).\ La,\ (b) :: AG\ (p).\ ag = \frac{by}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre *aL* de la Parabole *am*, la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée *pm*; il est clair * que $\overline{pm}^2 = pa \times ag\ (\frac{bbpx}{aa}) = \frac{bbyy}{aa}$ en mettant pour px * sa valeur yy; & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LP\ (a-x).\ Lp\ (b-\frac{bx}{a})$. Et par consequent la ligne *LM* passera par le point *m* extremité de l'ordonnée *pm*, c'est à dire, qu'elle coupera la Parabole *am* en ce point. Donc à cause des triangles semblables *LPM*, *Lpm*, on aura $LM.\ Lm :: PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LA\ (a).\ La\ (b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*Art. 6. & 20.
*Ibid.

COROLLAIRE I.

193. Si l'on prend dans la Parabole *AM* un segment quelconque *BAD*; & qu'ayant mené les droites *LB*, *LD*, qui rencontrent l'autre Parabole *am* aux points *b*, *d*, on tire la soûtendante *bd*: je dis que le segment *bad* de la Parabole *am*, est semblable au segment *BAD* de la Parabole *AM*. Car ayant inscrit dans le segment *BAD* une figure réctiligne quelconque *BMNOD*, il est clair que si l'on mene les droites *LM*, *LN*, *LO*, qui rencontrent l'autre Parabole aux points *m*, *n*, *o*; les triangles *LBM*, *Lbm*; *LMN*, *Lmn*; *LNO*, *Lno*; *LOD*, *Lod*; *LBD*, *Lbd*, seront semblables; & qu'ainsi les côtés *BM*, *bm*; *MN*, *mn*; *NO*, *no*; *OD*, *od*; *BD*, *bd*; seront paralleles, & toûjours en même raison chacun à son correspondant; puisque toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*, sont coupées en même raison aux points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*. D'où l'on voit que les figures réctilignes *BMNOD*, *bmnod*, sont semblables. Or comme il est évident que cette démonstration subsiste toûjours, telle que puisse être la figure réctiligne inscrite dans le segment *BAD*;

* Def. 1. * Def. 2. il s'ensuit que les segmens *BAD*, *bad*, * sont semblables; & par consequent * que les Paraboles *AM*, *am*, le sont aussi.

COROLLAIRE II.

194. De-là il est évident que si l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Parabole *AM*, laquelle rencontre l'autre Parabole *am* aux points *e*, *f*; les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Paraboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux.

COROLLAIRE III.

195. Toutes les Paraboles sont semblables entr'elles; car si l'on prend sur deux diametres semblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les parametres *AG*, *ag*; & si l'on conçoit que le diametre *La* soit situé sur le diametre *LA*, en sorte que les points *L*, *L*, tombent l'un sur l'autre, & que leurs ordonnées *PM*, *pm*, soient paralleles entr'elles: il est clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Parabole *AM*, une ligne droite *LM*; elle rencontrera toûjours l'autre Parabole *am* en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*. Donc * &c. * Art. 193.

COROLLAIRE IV.

196. De-là il suit que si l'on prend sur deux diametres semblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Paraboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux.

COROLLAIRE V.

197. Si deux segmens *BAD*, *bad*, sont semblables entr'eux, & que l'un d'eux *BAD*, soit le segment d'une

Parabole; je dis que l'autre bad sera le segment d'une autre Parabole, & qu'ainsi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puissent être semblables à une Parabole donnée. Car si l'on place le petit segment bad au dedans du grand BAD, en sorte que les soûtendantes bd, BD, soient paralleles; & qu'on inscrive dans l'un & l'autre deux figures réctilignes quelconques semblables $BMNOD$, $bmnod$: il est clair que les côtés homologues BM, bm; MN, mn; &c. de ces deux figures seront paralleles: puisque les angles DBM, dbm; BMN, bmn; &c. sont égaux entr'eux. Or menant LM, LN, LO, par le point de concours L des deux droites Bb, Dd, qui joignent les extremités des soûtendantes paralleles BD, bd, qui sont les deux côtés homologues donnés; ces droites LM, LN, LO, passeront par les points correspondans m, n, o, où elles seront divisées en même raison que LB l'est en b, ou LD en d; puisque $BD.\, bd :: LB.\, Lb :: BM.\, bm :: LM.\, Lm :: MN.\, Mn :: LN.\, Ln :: NO.\, no :: LO.\, Lo :: OD.\, od$.

Maintenant si l'on mene par le point L le diametre LA de la Parabole AM; qu'on le divise en a, en la même raison que LB l'est en b, ou LD en d; & qu'on décrive * du diametre aL, & du parametre ag qui soit au parametre AG du diametre AL de la Parabole AM, comme La est à LA, une Parabole am dont les ordonnées pm soient paralleles aux ordonnées PM de l'autre Parabole: il est évident * qu'elle passera par tous les points b, m, n, o, d, qui divisent dans la raison donnée de BD à bd toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD. Or comme ce raisonnement subsiste toûjours tel que puisse être le nombre des côtés des figures réctilignes semblables $BMNOD$, $bmnod$, & de telle grandeur qu'ils puissent être; il s'ensuit que la Parabole am passe par tout par où le segment bad passe, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 161.
* Art. 191.

PROPOSITION II.

Theorême.

FIG. 108. 109. **198.** SOIT *une Ellipse ou Hyperbole* AM *qui ait pour un de ses premiers diametres la ligne* AH, *& pour parametre de ce diametre la ligne* AG; *& ayant pris sur ce diametre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe* L, *& divisé en même raison aux points* a, h, *ses parties* LA, LH. *Soit une autre Ellipse ou Hyperbole* am *qui ait pour premier diametre la ligne* ah, *pour parametre de ce diametre la ligne* ag *qui soit à* AG *comme* ah *est à* AH, *& dont les ordonnées* pm *soient paralleles aux ordonnées* PM *de l'autre Séction* AM. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Séction* AM, *une ligne droite quelconque* LM; *elle rencontrera l'autre Séction* am, *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La : *c'est à dire que toutes les droites tirées du point fixe* L *aux points de la Séction* AM, *sont divisées en même raison par la Séction* am.

Il faut prouver que LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; AH, $2t$; & les indéterminées AP, x; PM, y; on aura $LA\ (a).\ La\ (b) :: LH.\ Lh :: LH \pm LA$ ou $AH\ (2t).\ Lh \pm La$ ou $ah = \frac{2bt}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre ah de la Séction am la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il est clair * que $AP \times PH\ (2tx \mp xx).\ \overline{PM}^2\ (yy) :: AH.$ $AG :: ah.\ ag :: ap \times ph\ \left(\frac{2bbtx \mp bbxx}{aa}\right).\ \overline{pm}^2 = \frac{bbyy}{aa}$, & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LP\ (a-x).$ $Lp\ (b - \frac{bx}{a})$. Et par consequent la ligne LM passera par le point m extremité de l'ordonnée pm, c'est à dire qu'elle coupera la Séction am en ce point. Donc à cause des triangles semblables LPM, Lpm, on aura

* Art. 42. 55. 81. & 118.

LM.Lm :: *PM*(y). *pm*($\frac{by}{a}$) :: *LA* (a). *La* (b). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

199. Si l'on prend dans la Séction *AM* un ſegment quelconque *BAD*, & qu'ayant mené les droites *LB*, *LD*, qui rencontrent l'autre Séction *am* aux points *b*, *d*, on tire la ſoûtendante *bd*: je dis que le ſegment *bad* de la Séction *am* eſt ſemblable au ſegment *BAD* de la Séction *AM*; & partant que ſi l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Séction *AM*, laquelle rencontre l'autre Séction aux points *e*, *f*; les ſegmens *EAF*, *eaf*, des deux Ellipſes ou des deux Hyperboles *AM*, *am*, ſeront ſemblables entr'eux. Cela ſe prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

COROLLAIRE II.

200. Toutes les Ellipſes ou Hyperboles *AM*, *am*, qui ont deux diametres ſemblables *AH*, *ah*, en même raiſon avec leurs parametres *AG*, *ag*, ſont ſemblables entr'elles. Car ſi l'on prend les parties *AL*, *aL*, qui ſoient entr'elles comme les diametres *AH*, *ah*; & que l'on conçoive que le diametre *ah* ſoit ſitué ſur le diametre *AH*, en ſorte que les points *L*, *L*, tombent l'un ſur l'autre, & que les ordonnées *pm*, *PM*, ſoient paralleles entr'elles: il eſt clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Séction *AM* une ligne droite *LM*, elle rencontrera toûjours l'autre Séction *am*, en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*. Donc * &c.

* *Art.* 199.

COROLLAIRE III.

201. De-là il eſt évident que s'il y a deux Ellipſes ou deux Hyperboles *AM*, *am*, dont deux diametres ſemblables *AH*, *ah*, ſoient en même raiſon avec leurs parametres *AG*, *ag*; & qu'ayant pris les parties *AL*, *aL*,

qui soient entr'elles comme les diametres *AH*, *ab*, on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: il est évident, dis-je, que les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Sections *AM*, *am*, sont semblables entr'eux.

COROLLAIRE IV.

202. Si deux segmens *BAD*, *bad*, sont semblables entr'eux; & que l'un d'eux soit le segment d'une Ellipse ou d'une Hyperbole *AM*, qui ait pour un de ses diametres quelconques la ligne *AH* dont le parametre est *AG*; Je dis que l'autre *bad* sera le segment d'une autre Ellipse ou d'une autre Hyperbole *am*, qui aura pour l'un de ses diametres semblables à *AH*, la ligne *ab* qui sera en même raison avec son parametre *ag*, que *AH* avec le sien *AG*. Car ayant placé le segment *bad*, au dedans du segment *BAD*, en sorte que la soûtendante *bd* soit parallele à la soûtendante *BD*, & que les lignes *Bb*, *Dd*, concourent en un point *L* du diametre *AH* (ce qui est toujours possible), & inscrit dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites *LM*, *LN*, *LO*, passeront par les points correspondans *m*, *n*, *o*, où elles seront divisées en même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d*.

Maintenant si l'on divise les parties *LA*, *LH*, du diametre *AH* aux points *a*, *h*, en même raison que
* Art. 161. *LB* l'est en *b*; & qu'on décrive * du diametre *ah* & du parametre *ag* qui soit au parametre *AG* du diametre *AH*, comme *La* est à *LA*, ou *ah* à *AH*, une Ellipse ou une Hyperbole *am*, dont les ordonnées *pm* soient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Ellipse ou Hyperbo-
* Art. 198. le *AM*: il est éviden * t qu'elle passera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui divisent dans la raison donnée de *bd* à *BD* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables

semblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puissent être; il s'ensuit que l'Ellipse ou l'Hyperbole *am* passe par tous les mêmes points par lesquels passe le segment *bd*, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE V.

203. Il est donc évident que si deux Ellipses ou deux Hyperboles *AM*, *am*, sont semblables, & qu'on prenne dans la Section *AM* un de ses diametres quelconques *AH*; il y aura toûjours dans l'autre Section *am* un diametre *ah* semblable à *AH*, qui aura avec son parametre *ag* la même raison que *AH* avec le sien *AG*: & qu'ainsi les diametres semblables *AH*, *ah*, seront en même raison avec leurs diametres conjugués. Or comme dans une Ellipse ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux differens diametres conjugués qui fassent entr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne different que par leur position, leur grandeur demeurant la même; il s'ensuit que dans les Ellipses ou les Hyperboles semblables tous les diametres conjugués qui feront les mêmes angles, seront entr'eux en même raison; en observant de prendre pour les antécédens de ces deux raisons les plus grands de ces deux diametres conjugués, & pour conséquens les moindres.

* *Art.* 66. & 128.

PROPOSITION III.

Theorême.

204. S*i l'on mene dans une Section Conique deux paralleles quelconques* BD, EF, *terminées par la Section; & qu'on joigne leurs extremités par deux droites* BE, DF: *je dis que les segmens* BMEB, DMFD, *compris par des portions de la Section, & par les droites qui joignent les extremités des paralleles, seront égaux entr'eux.* FIG. 140. 111.

S

Car ayant prolongé les soûtendantes *BE*, *DF*, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point *G*, & ayant mené par ce point & par le point de milieu *H* de la ligne *BD*, la droite *GH*; il est clair qu'elle divisera par le milieu en *K* la parallele *EF* à *BD*, comme aussi par le milieu en *P* un autre parallele quelconque *OO* à la même ligne *BD*. Donc la ligne *HK* sera un diametre
* Art. 146. * qui aura pour ordonnées de part & d'autres les paralleles *BD*, *EF*; & partant si l'on mene par un de ses points quelconques *P* une parallele à ces lignes, elle
* Art. 144. rencontrera * la Section en deux points *M*, *M*, également éloignés du point *P*; d'où l'on voit que les parties *MO*, *OM*, de la même parallele *MM* à *BD*, comprises dans les segmens *BMEB*, *DMFD*, sont toûjours égales entr'elles, en quelque endroit que puisse tomber cette parallele entre les lignes *BD*, *EF*. Il est donc
* Art. 186. évident * que ces deux segmens seront égaux entr'eux.

Si les soûtendantes *BE*, *DF*, étoient paralleles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu *H* de la ligne *BD* une droite *HK* parallele à ces soûtendantes, & la démonstration demeureroit toûjours la même.

COROLLAIRE I.

FIG. 110. 205. PUISQUE *PM* est toûjours égale à *PM*; il s'ensuit 1°. Que les Trapeses Coniques *KHBE*, *KHDF*, sont égaux entr'eux. 2°. (Lorsque la ligne *BD* au lieu de rencontrer la Section en deux points la touche en un point *A*) que les Trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, sont égaux; & qu'ainsi les segmens *AEMA*, *AFMA*, le sont aussi; puisque le triangle *AEF* est divisé en deux parties égales par le diametre *AK* qui passe par le milieu de *EF*.

COROLLAIRE II.

FIG. 110. 206. SI la Section étant une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole, l'on mene par les extremités des paralleles

BD, *EF*, les droites *BF*, *DE*, qui s'entrecoupent entre ces paralleles; les ſegmens *BFDAB*, *DEBAD*, ſeront égaux entr'eux. Car les triangles *BFD*, *BED*, qui ſont entre les mêmes paralleles *BD*, *EF*, & qui ont la même baſe *BD*, ſont égaux entr'eux; & partant ſi l'on ajoûte d'une part le ſegment *DMFD* plus le ſegment *BADB*, & de l'autre *BMEB* égal au ſegment *DMFD*, plus auſſi le même ſegment *BADB*; les touts *BFDAB*, *DEBAD*, ſeront égaux entr'eux.

Corollaire III.

207. De-la on voit comment on peut couper par un point donné *D* ſur une Section Conique, deux ſegmens *DGED*, *DFBD*, égaux chacun à un ſegment donné *BEDB*. Car ayant tiré les droites *BD*, *DE*, & mené *BG* parallele à *DE*, & *EF* parallele à *BD*, leſquelles rencontrent la Section aux points *G*, *F*; il eſt clair * en joignant la droite *DF*, que le ſegment *DFBD* eſt égal au ſegment *BEDB*, à cauſe des paralleles *DB*, *EF*; & de même en joignant *DG*, que le ſegment *DGED* eſt égal au ſegment *BEDB*, à cauſe des paralleles *BG*, *DE*. Fig. 112. * Art. 206.

Si le point donné tomboit ſur l'une des extremités du ſegment donné que je ſuppoſe être à preſent *DGED*, il faudroit mener par l'autre extremité *G*, une parallele *GF* à la tangente qui paſſe par le point *D*; & tirant par le point *F* où cette parallele rencontre la Section, & par le point donné *D*, la ſoûtendante *DF*, il eſt clair que le ſegment *DFBD* ſera égal au ſegment donné *DGED*.

Il eſt viſible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le ſeul ſegment *DFBD* qui ſoit égal au ſegment donné *DGED*; puiſque tout autre ſegment qui aura pour l'une de ſes extremités le point donné *D*, ſera plus grand ou moindre que le ſegment *DFBD*, ſelon que ſon autre extremité ſera plus proche ou plus éloignée du point *D* que n'eſt le point *F*. D'où il ſuit que ſi deux ſegmens *DGED*, *DFBD*, qui ont une extremité commune *D*, ſont égaux

entr'eux; & que si l'on mene par le point *D* une parallele à la droite *GF* qui joint leurs autres extremités, elle sera tangente en *D*.

COROLLAIRE IV.

208. On tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aisée de mener une Tangente par un point donné *D* sur une Séction Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques *DB*, *BE*, qui rencontrent la Séction aux points *B*, *E*, on menera par le point *B* une parallele *BG* à *DE*, & par le point *E* une parallele *EF* à *BD*, lesquelles rencontrent la Séction aux points *G*, *F*, que l'on joindra par une ligne droite *GF*, à laquelle on tirera par le point *D* une parallele qui sera la tangente cherchée; puisque les segmens *DGED*, *DFBD*, étant égaux chacun au même segment *BEDB*, le seront entr'eux.

PROPOSITION IV.

Theorême.

Fig. 113. 114. 115. 209. S'IL *y a dans une Ellipse, dans une Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées deux lignes droites* BD, EF, *paralleles entr'elles & terminées par la Séction; & qu'on tire du centre* C *les demi-diametres* CB, CE, CD, CF; *les Séteurs Elliptiques ou Hyperboliques* CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Car menant par les points de milieu *H*, *K*, des droites *BD*, *EF*, le diametre *CK*, les triangles *CHB*, *CHD*, & *CKE*, *CKF*, seront égaux entr'eux; puisqu'ils ont le même sommet *C*, & que leurs bases *HB*, *HD*, & *KE*, *KF*, sont égales. Par consequent (*fig.* 114.) $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD = KHDF + CDF$; & (*fig.* 113. 115.) $KHBE - CBE = \pm CHB \mp CKE = \pm CHD \mp CKF = KHDF - CDF$. Donc puisque les Trapeses Coniques *KHBE*,

KHDF, sont * égaux, il s'ensuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques *CBE*, *CDF*, le seront aussi. * *Art.* 205.

COROLLAIRE I.

210. SI la Section est une Ellipse, ou une Hyperbole; & que la ligne *BD* parallele à *EF*, devienne tangente en *A*; il est clair que les Secteurs *CAE*, *CAF*, seront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diametre *CA* jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne *EF* au point *K*, cette ligne sera coupée en deux également en ce point; & par consequent les triangles *CKE*, *CKF*, seront égaux. Or les trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, le sont * aussi. Donc &c. FIG. 113. 114. * *Art.* 205.

COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviser en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque *CEF*; il n'y a qu'à mener le demi-diametre *CA* qui divise par le milieu en *K* la soûtendante *EF* de ce Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs *CBE*, *CDF*, égaux entr'eux, en supposant *BD* parallele à *EF*. Car ayant de cette maniere les Secteurs *CAE*, *CAF*, & *CAB*, *CAD*, égaux entr'eux, les Secteurs *CBE*, *CDF*, qui en sont les differences, doivent aussi être égaux entr'eux.

PROPOSITION V.

Theorême.

212. SOIT *un demi-cercle* ADH, *qui ait pour diametre le premier ou grand axe* AH *d'une demie-Ellipse* ABH; *soit menée par un point quelconque* P *de l'axe* AH, *une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point* M, *& le cercle au point* N; *par où & par le centre* C *soient tirées les droites* CM, CN. *Je dis que le Secteur Elliptique* FIG. 116.

CAM *est au Secteur circulaire* CAN, *comme la moitié* CB *du petit axe de l'Ellipse, est à la moitié* CA *ou* CD *du grand.*

*Art. 42. & 55. Car par la proprieté * de l'Ellipse $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$, & par la proprieté du cercle $\overline{PN}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$. Donc $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. ou $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en tirant les racines quarrées, $PM . PN :: CB . CD$ ou CA. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire PMN, il

*Art. 186. s'ensuit * que l'espace Elliptique entier $ABHA$ est au demi-cercle $ADHA$, & la portion APM de cet espace à la portion APN du demi-cercle, comme CB est à CD ou à CA. Mais le triangle réctangle CPM est au triangle réctangle CPN qui a la même hauteur, comme la base PM est à la base PN, c'est à dire, comme CB est à CD ou à CA; & par consequent l'espace Elliptique APM plus ou moins le triangle CPM (plus lorsque AP est moindre que AC, & moins lorsqu'elle est plus grande) c'est à dire, le Sécteur Elliptique CAM sera à l'espace circulaire APN plus ou moins le triangle CPN, c'est à dire, au Sécteur circulaire CAN, comme CB est à CD ou à CA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

213. COMME le Secteur de cercle CAN est égal au réctangle de l'arc AN par la moitié du rayon CA ou CD; il s'ensuit que le Sécteur Elliptique CAM est aussi égal au réctangle de ce même arc AN par la moitié de CB.

COROLLAIRE II.

214. SI l'on mene par un point quelconque G du grand axe AH autre que le point P, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point E, & le

cercle au point *F*; je dis que les Sécteurs Elliptiques *ACE*, *ACM*, sont entr'eux, comme les Sécteurs circulaires *ACF*, *ACN*. Car *ACM*. *ACN* :: *CB*. *CD*. Et de même *ACE*. *ACF* :: *CB*. *CD*. Et partant *ACM*. *ACN* :: *ACE*. *ACF*. Et *ACM*. *ACE* :: *ACN*. *ACF*. D'où l'on voit que pour trouver un Sécteur Elliptique *ACM*, qui soit au Sécteur Elliptique *ACE* en raison donnée; il n'est question que de trouver un Sécteur circulaire *ACN* qui soit en raison donnée au Sécteur *ACF*, ou ce qui est la même chose, de diviser en raison donnée l'arc *ANF* ou l'angle *ACF*.

PROPOSITION VI.

Theorême.

215. S'IL *y a deux demi-Hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent pour centres le même point* C, *pour un de leurs demi-diametres la même droite* CA, *& pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametres* CA, *deux droites quelconques* CB, CD, *situées sur la même ligne; & qu'on mene par un point quelconque* P *du demi-diametre* CA (*prolongé s'il est necessaire*) *une droite parallele à* CD, *laquelle rencontre les Hyperboles aux points* M, N; *par lesquels & par le centre* C, *soient tirées les droites* CM, CN: *je dis que les Sécteurs Hyperboliques* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *seront entr'eux, comme les demi-diametres conjugués* CB. CD. Fig. 117. 118.

On aura par la proprieté * des deux Hyperboles *AM*, *AN*, ou *BM*, *DN*, ces deux proportions $\overline{PM}^2$. $\overline{CB}^2$ :: $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$. $\overline{CA}^2$ :: $\overline{PN}^2$. $\overline{CD}^2$. Et par conséquent $\overline{PM}^2$. $\overline{PN}^2$ :: $\overline{CB}^2$. $\overline{CD}^2$. Et en prenant les racines quarrées, *PM*. *PN* :: *CB*. *CD*. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la parallele *PMN*, il s'ensuit * que les espaces Hyperboliques *APM*, *APN*, ou *CPMB*, *CPND*, sont entr'eux comme *CB* est à *CD*. Mais les triangles *CPM*, *CPN*, sont en-

* Art. 81. & 118.

* Art. 186.

tr'eux, comme leurs bases PM, PN, (puisqu'ils sont situés entre les mêmes paralleles CD, PN), ou comme les demi-diametres conjugués CB, CD. Et par conséquent (*fig.* 117.) $CB. CD :: CPM - APM. CPN - APN :: CAM. CAN$. Ou bien (*fig.* 118.) $CB. CD :: CPMB - CPM. CPND - CPN :: CBM. CDN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

216. Si les deux demi-diametres conjugués CA, CD, sont égaux entr'eux, l'Hyperbole AN ou DN sera équilatere. Et si l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Secteurs Hyperboliques CAN, ou CDN, on auroit aussi la quadrature des Secteurs CAM, ou CBM, qui ont pour bases des portions AM, ou BM d'une autre Hyperbole, dont le demi-diametre conjugué CB peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puisque le rapport des Secteurs Hyperboliques CAM, CAN, ou CDN, CBM, étant exprimé par les droites CD, CB, est donné. D'où l'on voit que si l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatere, on auroit aussi celle de
* Art. 212. toutes les autres Hyperboles: de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipses.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 119. 217. *Si l'on prend sur une asymptote* CN *d'une Hyperbole* EBDF, *deux parties* CK, CL, *qui soient entr'elles en même raison que deux autres parties quelconques* CG, CH, *de la même asymptote; & qu'ayant mené les paralleles* GF, HD, KB, LE, *à l'autre asymptote* CP, *lesquelles rencontrent l'Hyperbole aux points* F, D, B, E, *on tire les demi-diametres* CF, CD, CB, CE: *je dis que les deux Secteurs*

Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites BD, EF, qui rencontrent les asymptotes aux points M, O, N, P; les paralleles KB, HD, donneront cette proportion, $MB.MK$ :: $DO.CH$. Les paralleles LE, GF, donneront aussi cette autre proportion, $NE.NL$ :: $FP.CG$. Et partant puisque * $MB=DO$, & $NE=FP$, il s'ensuit que $MK=CH$, & $NL=CG$. Or par la supposition CG ou LN. CH ou KM :: $CK.CL$ :: * $LE.KB$. Et partant LN. LE :: $KM.KB$. Donc les lignes NE, MB, c'est à dire, les deux droites EF, BD, dont elles sont parties, seront paralleles entr'elles. Donc * les Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, sont égaux entr'eux. *Ce qu'il fal. &c.*

* *Art.* 95.

* *Art.* 100.

* *Art.* 109.

COROLLAIRE I.

218. Si les parties CK, CL, de l'asymptote CN, sont en même raison que deux parties quelconques CS, CT de l'autre asymptote CP; & qu'on mene les paralleles KB, LE, à l'asymptote CP, & les paralleles SD, TF, à l'autre asymptote CN; il est clair que les Secteurs Hyperboliques CDF, CBE, seront aussi égaux entr'eux. Car ayant mené les paralleles FG, DH, à l'asymptote CP, on aura * $CG.CH$ :: HD ou CS. GF ou CT * :: $CK.CL$. Donc &c.

* *Art.* 100.

* *Hyp.*

COROLLAIRE II.

219. Si l'on prend sur la même asymptote la partie CK troisiéme proportionnelle à deux parties quelconques CG, CH; on prouvera par un raisonnement semblable à celui du Theorême que la ligne BF est parallele à la tangente qui passe par le point D; & qu'ainsi * les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, sont égaux entr'eux. D'où il suit que si l'on prend sur une asymptote autant de parties qu'on voudra CG, CH, CK, CL, &c. en progression geometrique continuë, d'où partent les paralleles GF, HD, KB, LE, &c. à l'au-

* *Art.* 210.

tre asymptote, les Séčteurs Hyperboliques *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. seront tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

220. DE-LA on voit que si *CH* est la premiere de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes *CG*, *CL*; & qu'on tire les droites *GF*, *HD*, *LE*, paralleles à l'autre asymptote; le Séčteur *CDF*, sera au Séčteur *CFE*, comme 1 est à 3. De même, si *CH* est la premiere de trois moyennes proportionnelles entre *CG*, *CL*; le Séčteur *CDF* sera au Séčteur *CFE*, comme 1 est à 4. Et en général, si la lettre *m* marque un nombre entier quelconque, & que *CH* soit la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes *CG*, *CL*, que le nombre $m - 1$ contient d'unités; le Séčteur *CDF*, sera au Séčteur *CFE*, comme 1 est au nombre *m*.

REMARQUE.

221. ON peut ici donner une idée fort éxaćte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorsqu'il s'agit d'operer sur de forts grands nombres. Voici comment :

Si l'on suppose que *CG*, exprime l'unité, & que *CL* étant decuple de *CG*, c'est à dire, 10, le Séčteur Hyperbolique *CFE*, soit divisé en 10000000000 parties égales. Et si l'on compose une table divisée en deux colomnes, dont la premiere renferme de suite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui soient tels que *CH*, exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Séčteur Hyperbolique *CDF* contient par rapport au nombre des parties que contient le Séčteur

CFE: les nombres artificiels ſeront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels auſquels ils répondent. Cela poſé,

1°. Si l'on propoſe de multiplier deux nombres naturels quelconques *CH*, *CK*, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui exment les Secteurs *CFD*, *CFB*, & ajoûtant enſemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur *CFE*, vis-à-vis duquel ſera placé le nombre naturel *CL* produit de la multiplication des deux nombres *CH*, *CK*.

2°. Si l'on propoſe de diviſer le nombre *CL* par le nombre *CK*, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme *CFB* du Diviſeur *CK*, du Logarithme *CFE* du nombre à diviſer *CL*, pour avoir le Logarithme *CBE* ou *CFD* du quotient *CH*.

3°. Si l'on propoſe d'extraire une racine quelconque du nombre *CL*, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviſer ſon Logarithme *CFE* en trois parties égales, pour avoir le Logarithme *CFD* vis-à-vis duquel eſt placé le nombre *CH*, qui eſt la racine cubique cherchée.

Tout cela eſt une ſuite de ce que les Sécteurs Hyperboliques *CFD*, *CBE*, ſont égaux entr'eux, lorſque *CG*. *CH* :: *CK*. *CL*. Et que les Sécteurs *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. ſont auſſi égaux entr'eux, lorſque *CG*. *CH* :: *CH*. *CK* :: *CK*. *CL* :: &c. Il eſt donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abreger extrêmement les operations de l'Arithmetique, lorſqu'il s'agit d'operer ſur de grands nombres, comme dans les calculs Aſtronomiques.

Comme l'on n'a pû juſqu'à preſent trouver en nombres exacts, le rapport des Sécteurs Hyperboliques *CFD*, *CFB*, &c. au Sécteur *CFE*, on s'eſt contenté d'exprimer ce raport en nombres fort approchans; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les proprietés qu'on vient d'expliquer. Or dans la suppositionque le Séteur *CFE* Logarithme de *CL* (10) contient 1000000000 parties égales, on trouvera que le parallelogramme *CGFT* contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque *CBF*, est au parallelogramme *CGFT* à peu prés comme le Logarithme du nombre *CK* trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caractéres outre la caractéristique.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 110. 222. S'IL *y a sur chaque asymptote deux parties* CG, CL, *&* CR, CS, *qui soient telles que* $\overset{m}{V}$CG. $\overset{n}{V}$CL :: $\overset{m}{V}$CR. $\overset{n}{V}$CS; *& qu'on tire les droites* GF, LE, RT, SV, *paralleles aux asymptotes: je dis que le Secteur* CFE, *sera au Secteur* CTV, *comme* m *est à* n. *Les lettres* m *&* n *marquent des nombres entiers quelconques.*

Car si l'on fait $\overset{m}{V}$*CG*. $\overset{n}{V}$*CL* :: *CG*. *CH*. Et $\overset{m}{V}$*CR* $\overset{n}{V}$*CS* :: *CR*. *CQ*. Et qu'on tire les droites *HD*, *QN*, paralleles aux asymptotes; il est clair que les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CTN*, seront égaux * entr'eux, puisque* *CG*. *CH* :: *CR*. *CQ*. Or selon la nature des Progressions geometriques, la ligne *CH* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CG* & *CL* que le nombre *m* — *i* contient d'unités, & de même la ligne *CQ* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CR* & *CS* que le nombre *n* — *i* contient d'unités. Donc* *CFE*. *CFD* :: *m*. *i*. Et *CTN* ou *CFD*. *CTV* :: *i*. *n*. Et par conséquent le Secteur *CFE* est au Secteur *CTV* en raison composée de *m* à *i*, & de *i* à *n*, c'est à dire, comme le nombre *m* est au nombre *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 118.
* Hyp.
* Art. 220.

COROLLAIRE.

223. DE-LA on voit qu'un Séčteur Hyperbolique *CFE* étant donné avec un point quelconque *T* de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point *V* de la même Hyperbole, tel que le Séčteur *CFE* soit au Séčteur *CTV*, comme *m* est à *n*, que prendre *CS* en sorte que $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: \sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[m]{CG^n} . \sqrt[m]{CL^n} :: CR . CS$. C'est à dire, qu'il faut prendre $CS = CR \times \sqrt[m]{\frac{CL^n}{CG^n}}$.

PROPOSITION IX.

Theorême.

224. SI *l'on mene par les extremités* B, F, *d'un Séčteur Hyperbolique quelconque* CBF, *les droites* BK, FG, *paralleles à une asymptote* CS, *& terminées par l'autre* CL; *je dis que le Séčteur Hyperbolique* CBF *est égal à l'espace hyperbolique* BKGF *compris entre les paralleles* BK, FG, *à une asymptote* CS, *la partie* GK *de l'autre asymptote* CL, *& la portion* BF *de l'Hyperbole.* FIG. 121.

Car si l'on retranche des triangles égaux * *CKB*, *CGF*, le même triangle *CGA* (le point *A* est le point d'interséčtion des deux droites *FG*, *CB*) & qu'on ajoûte aux deux restes *BKGA*, *CAF*; le même espace hyperbolique *BAF*, on formera d'une part l'espace *BKGF*, & de l'autre le Secteur *CBF* qui seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 99.

COROLLAIRE I.

225. SI l'on eut mené les lignes *BQ*, *FO*, paralleles à l'asymptote *CL*, & terminées par l'asymptote *CS*, on auroit prouvé de même que le Séčteur Hyperbolique

CBF eſt égal à l'eſpace hyperbolique *BQOF*; d'où l'on voit que les eſpaces ou Trapeſes hyperboliques *BKGF*, *BQOF*, ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. DE-LA il eſt évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, ſe doit auſſi entendre de ces ſortes de Trapeſes; puiſqu'ils leurs ſont égaux.

PROPOSITION X.

Theorême.

FIG. 122. 227. SOIENT *deux differentes Hyperboles* BMF, HND, *qui ayent les mêmes aſymptotes* CL, CS, *& ſoient menées par deux points quelconques* G, K, *d'une aſymptote deux paralleles* GDF, KHB, *à l'autre. Je dis que l'eſpace hyperbolique* HKGD *eſt à l'eſpace hyperbolique* BKGF, *comme la puiſſance de l'Hyperbole* HND, *eſt à la puiſſance de l'Hyperbole* BMF.

Car ayant mené par un point quelconque *P* de la partie *GK*, une parallele aux deux droites *GD*, *KH*, laquelle rencontre l'Hyperbole *BMF* au point *M*, & l'Hyperbole *HND* au point *N*; & nommé la puiſſance de l'Hyperbole *HND*, *aa*; celle de l'Hyperbole *BMF*, *bb*; & l'indéterminée *CP*, *x*; on aura

* Art. 101. * $PN = \frac{aa}{x}$, & $PM = \frac{bb}{x}$; & partant $PN . PM :: aa . bb$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la

* Art. 186. partie *GK* que tombe le point *P*; il s'enſuit * que l'eſpace hyperbolique *HKGD*. *BKGF* :: *aa*. *bb*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

228. LORSQUE les puiſſances des Hyperboles *HND*, *BMF*, ſont entr'elles, comme le nombre *m* eſt au nom-

bre n; on pourra toûjours trouver dans l'Hyperbole *HND* un Trapese hyperbolique *RSVT* égal à un Trapese hyperbolique *GKBF* de l'autre *BMF*, les droites *CG*, *CK*, *CR*, étant données. Car il est clair * que le Trapese *GKHD* est au Trapese *GKBF*, comme m est à n; & qu'ainsi toute la difficulté se reduit à trouver dans la même Hyperbole *HND*, le Trapese *RSVT*, qui soit au Trapese *GKHD*, comme le nombre n est au nombre m: & c'est ce qui se fera * en prenant *CS*, telle que $\sqrt[n]{CG^m}.\ \sqrt[n]{CK^m} :: CR.\ CS.$

* *Art.* 222. & 225.

* *Art.* 223. & 226.

DÉFINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie *AC*, qui ait pour origine le point fixe *A*; & soit une ligne courbe *AMB* telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M* une droite *MP* qui fasse avec *AC* un angle donné *APM*, & ayant nommé les indéterminées *AP*, x; *PM*, y; on ait toûjours $ax = yy$ (la lettre a marque une ligne donnée): il est clair * dans cette supposition que la ligne courbe *AMB* est une Parabole qui a pour diametre la ligne *AC*, pour une ordonnée à ce diametre la droite *PM*, & pour parametre de ce diametre la donnée a. Mais si l'on suppose à present que la nature de la courbe *AMB* soit exprimée par l'équation $y^3 = aax$, ou par cette autre $y^3 = axx$; cette ligne courbe sera nommée *Parabole cubique* ou *du troisiéme degré*; parce que celle des deux indéterminées x ou y, dont la puissance est la plus élevée, monte au troisiéme degré. De même si l'équation est $y^4 = a^3x$, ou $y^4 = ax^3$; la ligne courbe *AMB* est appellée *Parabole du quatriéme degré*; parce que l'indéterminée y dont la puissance est la plus haute, monte au quatriéme degré. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini. FIG. 123.

* *Art.* 19.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite *AC* qui ait pour origine le point fixe *A*; & soit FIG. 124

une ligne courbe BM, telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AC un angle donné APM, & ayant nommé AP, x; PM, y; on ait toûjours $xy = aa$ (la lettre a marque
Art. 101. une ligne donnée): il est clair que cette ligne courbe sera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ses asymptotes la ligne AC, & pour l'autre, la ligne AD parallele à PM, & dont la puissance sera le quarré aa. Mais si l'équation qui exprime la nature de la courbe BM est $xxy = a^3$; cette ligne courbe sera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troisiéme degré*, parce que le produit xxy des deux indéterminées x & y, a trois dimensions. De même, si l'équation étoit $x^3y = a^4$; la ligne courbe BM seroit une *Hyperbole du quatriéme degré*; parceque le produit x^3y à quatre dimensions. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini.

COROLLAIRE.

FIG. 123. 124. **229.** Si l'on suppose que la lettre m marque un nombre entier quelconque qui soit l'exposant de la puissance de l'indéterminée AP (x); & de même que la lettre n marque l'exposant de la puissance de l'autre indéterminée PM (y): il est clair que l'équation $y^n = x^m \times a^{n-m}$ (ou simplement $y^n = x^m$, en faisant pour abreger la donnée $a = 1$) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ (ou simplement $x^m y^n = 1$, en faisant $a = 1$) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

COROLLAIRE II.

230. Si l'on mene par l'origine fixe A de la ligne AC une ligne droite indéfinie AD parallele à PM; & qu'ayant tiré MK parallele à AC, qui rencontre AD au point K, on nomme les indéterminées AK, x; KM, y; il

il est clair que l'indéterminée x qui exprimoit auparavant la ligne AP ou MK, devient à present y; & qu'au contraire y qui exprimoit PM ou AK, devient à present x. D'où il suit.

1°. Que si la courbe AMB est une Parabole ordinaire, elle aura pour équation $yy = ax$ ou $xx = ay$, selon qu'on rapportera ses points à ceux de la ligne AC ou AD; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3 = aax$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^3 = aay$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD; & en general que si la ligne courbe AMB a pour équation $y^n = x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite AC, cette même courbe aura pour équation $x^n = y^m a^{n-m}$ (l'on suppose que n surpasse m) étant rapportée à la ligne AD. FIG. 123.

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toûjours la même équation $xy = aa$, soit qu'on la rapporte à la ligne AC ou à la ligne AD; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxy = a^3$ étant rapportée à AC, aura pour équation $xyy = a^3$ étant rapportée à l'autre ligne AD; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation $x^m y^n = a^{m+n}$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^n y^m = a^{m+n}$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD. FIG. 124.

COROLLAIRE III.

231. DE-LA il est évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3 = aax$ ou $x^3 = aay$, & l'autre $y^3 = axx$ ou $x^3 = ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une seule Hyperbole cubique $xxy = a^3$ ou $xyy = a^3$. Car les indéterminées x & y ne peuvent être combinées que des quatre premieres manieres pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troisiéme degré; & des deux secondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premieres égalités appartiennent à deux differentes courbes, & les deux secondes à la même; il s'ensuit, &c. On peut trouver par

la même voïe le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatriéme, cinquiéme degré, &c.

COROLLAIRE IV.

FIG. 124. 232. NON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indéfinies *AC*, *AD*; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne *AC*; il est manifeste que plus *AP* (x) augmente, plus au contraire y^n, & par consequent *PM* (y) diminuë; de sorte que x étant infiniment grande, *PM* (y) devient nulle ou zero: c'est à dire que l'Hyperbole *BM* & la ligne *AC*, étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toûjours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constituë l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne *AD*, on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il suit que plus *AK* (x) devient grande, plus au contraire *KM* (y) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne *AD* est encore une asymptote de la même Hyperbole.

PROPOSITION XI.

Problême.

FIG. 123. 233. SOIT *proposé de mener d'un point donné* M *sur la seconde Parabole cubique* AMB, *dont la nature est exprimée par l'équation* $y^3 = axx$, *la tangente* MT.

Ayant supposé l'arc *MN* infiniment petit, & mené *NQ* parallele à *PM*, & *MR* parallele à *AC*: le petit triangle *MRN* sera semblable au grand *TPM*; puisque le

petit arc MN peut être regardé * comme la prolongation de la tangente TM. Cela posé, on nommera la soutangente cherchée TP, s; & la petite droite PQ ou MR, e; ce qui donnera $RN = \frac{ey}{s}$, à cause des triangles semblables TPM, MRN. Or si l'on met le cube de QN ($y + \frac{ey}{s}$) à la place de y^3 dans l'équation $y^3 = axx$ qui exprime la nature de la courbe AMB; & à la place de xx, le quarré de AQ ($x + e$): il est évident qu'on formera une équation $y^3 + \frac{3ey^3}{s} + \frac{3eey^3}{ss} + \frac{e^3y^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette derniere équation ceux de la premiere, & qu'on divise ensuite par e, on trouvera $\frac{3y^3}{s} + \frac{3ey^3}{ss} + \frac{eey^3}{s^3} = 2ax + ea$; dans laquelle effaçant tous les termes où e se rencontre, parce que PQ (e) étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin $\frac{3y^3}{s} = 2ax$; & partant PT (s) $= \frac{3y^3}{2ax} = \frac{3}{2}x$ en mettant pour y^3 sa valeur axx. *Ce qu'il falloit trouver.* * Art. 189.

REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de y, une pareille puissance de $y + \frac{ey}{s}$, on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de e, ils renferment chacun e, ou des puissances de e, dans la derniere équation que l'on trouve à la fin de l'operation; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de même lorsqu'on substitue à la place de la puissance de x, une pareille puissance de $x + e$. Mais si l'on forme de suite

toutes les puissances du binome $x + e$, on aura pour les deux premiers termes de la seconde puissance $x^2 + 2ex$; de la troisiéme $x^3 + 3exx$; de la quatriéme $x^4 + 4ex^3$; de la cinquiéme $x^5 + 5ex^4$; & ainsi de suite à l'infini. De sorte que les deux premiers termes d'une puissance quelconque m de $x + e$, seront $x^m + mex^{m-1}$. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puissance quelconque n du binome $y + \frac{ey}{s}$, seront $y^n + \frac{ney^n}{s}$.

COROLLAIRE.

235. DE-LA on voit que pour trouver une expression generale de la soutangente PT (s) des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à se servir de l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$, ou (prenant a pour l'unité) $y^n = x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation generale $y^n = x^m$ à la place de y^n, les deux premiers termes de la puissance n de $y + \frac{ey}{s}$, c'est à dire, $y^n + \frac{ney^n}{s}$; & de même à la place de x^m, les deux premiers termes de la puissance m de $x + e$, c'est à dire, $x^m + mex^{m-1}$: ce qui donnera $y^n + \frac{ney^n}{s} = x^m + mex^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la premiere équation de ceux de celle-ci, & divisant ensuite par e, l'on aura $\frac{ny^n}{s} = mx^{m-1}$; & partant $s = \frac{ny^n}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$ en mettant pour y^n sa valeur x^m.

PROPOSITION XII.

Problême.

FIG. 124. 236. MENER *les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.*

La même préparation étant faite que dans la propo-

ſition précédente, on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de AP (x) à PM (y), à la place de x^m les deux premiers termes de la puiſſance m de AQ $(x+e)$ c'eſt à dire, $x^m + mex^{m-1}$; & de même à la place de y^n les deux premiers termes de la puiſſance n de QN $(y - \frac{ey}{s})$ c'eſt à dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$: ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + mey^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et retranchant par ordre des deux membres de cette derniere équation, ceux de la premiere; & diviſant enſuite par ey^n; il vient $mx^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mnex^{m-1}}{s} = 0$; dans laquelle équation effaçant le terme $- \frac{mnex^{m-1}}{s}$ qui eſt nul par rap- aux deux autres, parce qu'il renferme dans ſon expreſſion la ligne infiniment petite ou nulle PQ (e), on trouve en tranſpoſant à l'ordinaire PT $(s) = \frac{nx^m}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$.

COROLLAIRE.

237. Il eſt donc évident que pour mener la Tangente MT d'un point donné M ſur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra; dont l'équation eſt pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$; il ne faut que prendre la ſoutangente $PT = \frac{n}{m} AP$ du même côté du point A par rapport au point P, lorſque c'eſt une Parabole; & du côté oppoſé, lorſque c'eſt une Hyperbole. FIG. 123. 124.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

238. SOIT *comme dans la définition quatriéme, une* Fig. 125. *Parabole* AMB *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'equation* $y^n = x^m a^{n-m}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la droite* BC *qui fasse avec* AC *l'angle donné* ACB, *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que le parallelogramme circonscrit* ACBD *est à l'espace Parabolique* ACBMA *compris par les droites* AC, CB, *& par la portion de Parabole* AMB; *comme* m+n *est à* n.

Il faut prouver que ACBD. ACBMA :: m+n. n.

Ayant supposé sur la portion de Parabole *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, ou si l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, si petite qu'elle puisse être; & mené les droites *MP*, *NQ*, paralleles à *BC*; & *MK*, *NL*, paralleles à *AC*; lesquelles forment par leurs rencontres le petit parallelogramme *MRNS*: on tirera la tangente *MT* qui rencontre le diametre *AC* au point *T*, par où l'on menera une parallele à *CB*, qui rencontre les lignes *MK*, *NL*, aux points *F*, *G*. Cela fait, * Art. 189. on regardera * le petit arc *MN* comme l'un des petits côtés du Polygone qui compose la portion de Parabole *AMB*, & la tangente *MT* comme le prolongement de ce petit côté; de sorte que l'on a deux triangles réctilignes *NRM*, *MPT*, qui sont semblables: c'est pourquoi *NR* ou *MS*. *RM* :: *MP*. *PT* ou *MF*. Et partant le parallelogramme *PMRQ* est égal au parallelogramme *FMSG*; puisque les angles *PMR*, *FMS*, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont réciproquement proportionnels.

* Art. 137. Or * *MF* ou $PT = \frac{n}{m} AP$ ou $\frac{n}{m} MK$. Donc aussi le parallelogramme *FMSG* ou son égal $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Et comme cela arrive toûjours en quel-

que endroit de la portion de Parabole *AMB* que tombe le petit arc *MN*; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes *PMRQ*, c'est à dire, * le Triligne parabolique $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m}$ *KMSL*. On aura donc *ADBMA*. *ACBMA* :: *m*. *n*. Et par conséquent *ADBMA*+*ACBMA* ou *ACBD*. *ACBMA* :: *m*+*n*. *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 184.

COROLLAIRE.

239. DE-LA il est évident que le Triligne parabolique *APM* est au parallelogramme circonscrit *APMK*, comme *n* est à *m*+*n*: & qu'ainsi le Trapese parabolique $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$; puisque $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$, & $APM = \frac{n}{m+n} APMK$.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

240. SOIT *comme l'on a expliqué dans la définition cinquiéme, une Hyperbole* BMO *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation* $x^m y^n = a^{m+n}$; *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la ligne* BC *parallele à l'une des asymptotes* AD, *& terminée par l'autre en* C; *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que ce parallelogramme inscrit* ACBD *est à l'espace hyperbolique* ECBMO *renfermé par la droite déterminée* BC, *par la ligne* CE *prolongée à l'infini du côté de* E, *& par la portion d'Hyperbole* BMO, *prolongée aussi à l'infini du côté de* O; *comme* m − n *est à* n. FIG. 126.

Il faut prouver que ACBD. ECBMO :: m−n. n.

La même préparation étant faite que dans la proposition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallelogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole BMO que tombe le petit arc MN; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes $PMRQ$, c'est à dire, * l'espace $ECBMO$ $= \frac{n}{m} EADBMO$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $EADBMO$. $ECBMO :: m. n$; & partant $EADBMO - ECBMO$, ou $ACBD$. $ECBMO :: m - n. n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE I.

241. DE-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puisque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raison l'espace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

COROLLAIRE II.

242. DE-LA il suit:

1°. Que lorsque m surpasse n; le rapport du parallelogramme inscrit $ACBD$ à l'espace $ECBMO$ indéfiniment étendu du côté de E, sera toûjours exprimé par des nombres positifs; & qu'ainsi on aura toûjours dans ce cas la quadrature absoluë de cet espace.

2°. Que lorsque $m = n$, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallelogramme $ACBD$ est à l'espace hyperbolique $ECBMO$, comme zero est à l'unité: c'est à dire que cet espace est infini par rapport au parallelogramme inscrit $ACBD$.

3°. Que lorsque m est moindre que n; le parallelogramme inscrit $ACBD$ sera à l'espace hyperbolique $ECBMO$ comme un nombre negatif à un nombre positif: ce qui fait voir alors que la raison de cet espace au parallelogramme $ACBD$, est pour ainsi dire plus qu'infinie. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que

que l'espace hyperbolique renfermé par la droite DB, par l'asymptote AD prolongé à l'infini du côté de D, & par l'Hyperbole OMB aussi prolongée à l'infini du côté de B, sera au parallelogramme inscrit $ACBD$, comme m est à $n-m$, c'est à dire, que cet espace sera quarrable; car prenant les indéterminées (x) sur l'asymptote AD, au lieu qu'on les avoit prises sur l'asymptote AC, l'équation à l'Hyperbole deviendra * $x^n y^m = a^{m+n}$. * Art. 230.

PROPOSITION XV.

Theorême.

243. SOIT *dans l'angle droit* CAD *une ligne courbe quelconque* AMB, *dont l'on sçache mener les tangentes* MT; *& soit dans l'angle* DAH *qui est à côté de celui ci, une autre ligne courbe* HFE, *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* F *la ligne* FM *parallele à* AC, *qui rencontre en* K *la ligne* AD, *& en* M *la premiere courbe* AMB, *& ayant tiré la tangente* MT *qui rencontre* AC *au point* T: *on ait toûjours comme* AK *est à* MT, *ainsi une ligne constante* a *qui demeure toûjours la même en quelque endroit que tombe le point* F, *est à* KF. *Je dis que si par un point quelconque* D *de la ligne* AD *l'on mene une ligne droite* EB *parallele à* AC *& terminée par les deux courbes; l'espace* ADEFH *sera égal au rectangle de la courbe* AMB *par la constante* a. FIG. 127.

Il faut prouver que ADEFH $=$ AMB$\times$a.

Ayant supposé par tout où l'on voudra sur la courbe AMB l'arc MN infiniment petit, & mené les droites MF, NG, paralleles à AC, & qui rencontrent la droite AD aux points K, L, & la courbe HFE aux points F, G, on tirera les droites FS, MR, paralleles à AD, & on prolongera RM jusqu'à ce qu'elle rencontre AC en P. Cela posé, les deux triangles réctangles semblables MPT, MRN, donnent $MR . MN :: MP$ ou $AK . MT :: a . KF$. Et partant $KF \times MR$, c'est à dire,

le petit réctangle $FKLS = MN \times a$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Courbe *AMB* qu'on prenne le petit arc *MN*, il s'ensuit que la somme de tous les petits réctangles *KLSF*, c'est à * dire, l'espace *ADEFH* sera égal à la somme de tous les petits réctangles $MN \times a$, c'est à dire, au rectangle de la courbe *AMB* par la constante *a*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 184.

COROLLAIRE I.

244. DE-LA il est évident que le réctangle de la portion *AM* par la constante *a*, est égal à l'espace *AKFH*; & de même que le réctangle de la portion *MB* par la même ligne *a*, est égal à l'espace *KDEF*.

COROLLAIRE II.

245. SI l'on suppose que la Courbe *AMB* soit la seconde Parabole cubique, qui ait pour équation $y^3 = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{3}{2}x$; & à cause du triangle réctangle *MPT*, l'hypothenuse $MT = \sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$. Mais par la proprieté de la Courbe *HFE*, il faut que $MP(y) . MT(\sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}) :: a . KF$. Ce qui donne $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9aaxx}{4yy} = aa + \frac{9}{4}ay$, en mettant pour axx sa valeur y^3. D'où l'on voit que la Courbe *HFE* est dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne *AD*, dont l'origine est au point *O*, pris de l'autre côté du point *D* par rapport au point *A*, en sorte que $AO = \frac{4}{9}a$, & dont le parametre $= \frac{9}{4}a$: car par la proprieté de cette Parabole * le quarré de l'ordonnée *KF* sera égal au réctangle de *KO* par le parametre $\frac{9}{4}a$, c'est à dire en termes analytiques, $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9}{4}ay$. Or comme les Trapeses paraboliques *ADEH*, *AKFH*, sont * quarrables, il s'ensuit qu'on a la réctification tant de la Courbe *AMB*, que d'une

* Art. 237. * Art. 19. * Art. 239.

de ses portions quelconques AM.

Si l'on veut exprimer au juste la valeur de la portion AM, on remarquera que AH est $= a$; puisque $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{9}{4}a = aa$. Ainsi ayant nommé la tangente MT, t; la ligne AK ou MP, y; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapese parabolique $FKAH$ ou* $\frac{2}{3} FK \times KO - \frac{2}{3} HA \times AO$ *Art. 239. $= \frac{2}{3} at + \frac{8aat}{27y} - \frac{8}{27} aa = AM \times a$. C'est à dire en divisant par a, que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3} t + \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27} a$. Ce qui donne cette construction.

Ayant mené du point donné M sur la seconde Parabole cubique AMB, la tangente MT qui rencontre en Q la ligne AK menée par l'origine A de l'axe AC perpendiculairement à cet axe, on prendra sur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27} a$; & ayant tiré VC parallele à MT qui rencontre l'axe en C, on décrira du centre V & du rayon VA un arc de cercle qui coupe VC en X. Je dis que la portion AM de la seconde Parabole cubique AMB sera égale à la somme des deux droites MQ, CX.

Car à cause des triangles semblables TPM, TAQ; il est clair que $MQ = \frac{2}{3} MT (t)$, puisque $AP = \frac{2}{3} PT$; & à cause des triangles semblables MPT, VAC, il vient $MP (y) . MT (t) :: AV (\frac{8}{27} a) . VC = \frac{8at}{27y}$, & partant $CX = \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27} a$. Donc &c.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

246. SOIT *une Hyperbole équilatere* EAF, *qui ait pour centre le point* C, *& pour la moitié de son premier axe la* FIG. 128.

droite CA; *avec une Parabole* NCS *qui ait pour axe la ligne* AC *prolongée du côté de* C *qui en sera l'origine, & pour parametre de l'axe une ligne double de* CA. *Si l'on mene par un point quelconque* N *de la Parabole* NCS, *une parallele* NE *à* CA, *qui rencontre l'Hyperbole* EAF *au point* E, *& son second axe* CL *au point* L; *je dis que l'espace hyperbolique* CLEA *renfermé entre les droites* AC, CL, LE, *& la portion* EA *de l'Hyperbole, est égal au réctangle de la portion* CN *de la Parabole par la droite* AC.

Ayant mené par un point quelconque M de la portion CN de la Parabole, une perpendiculaire MG à la tangente MT qui passe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points G, T; & une parallele MB à CA, qui rencontre l'Hyperbole en B, & son second axe CL en H: les lignes MG, HB, seront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée MP à l'axe on
* *Art.* 24. aura * $PG = CA$; & à cause du triangle réctangle MPG, le quarré $\overline{MG}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2$
* *Art.* 117. $=$ * $\overline{HB}^2$, à cause de l'Hyperbole équilatere EAF; & partant $MG = HB$. Or les triangles réctangles semblables TPM, MPG, donnent MP ou $CH . MT :: $
* *Art.* 243. PG ou $CA . MG$ ou HB. Donc * &c.

COROLLAIRE I.

247. DE-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $HLEB$ est égal au réctangle de la portion de Parabole MN par la moitié CA du parametre de son axe.

COROLLAIRE II.

248. SI l'on mene dans l'Hyperbole équilatere EAF deux paralleles quelconques BD, EF; & qu'on tire par leurs extremités des lignes droites BM, EN, DR, FS, paralleles à AC, lesquelles rencontrent le second axe de l'Hyperbole aux points H, L, K, O; la difference des réctangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera

égale (en tirant les droites BE, DF,) à la difference des Trapeses réctilignes $HLEB$, $KOFD$.

Car le réctangle $AC \times MN$ est égal* au Trapese hyperbolique $HLEB$; & par conséquent le réctangle $AC \times MN$ plus le segment hyperbolique BE sera égal au Trapese réctiligne $HLEB$: de même le réctangle $AC \times RS$ plus le segment hyperbolique DF sera égal au Trapese réctiligne $KOFD$. Donc puisque les deux segmens hyperboliques EB, DF, sont * égaux entr'eux, la difference des réctangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la difference des Trapeses réctilignes $HLEB$, $KOFD$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 247.

* Art. 204.

COROLLAIRE III.

249. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent; si l'on fait $2AC . LH :: BH + LE . m$. il est clair que le réctangle $AC \times m = \frac{1}{2}LH \times \overline{BH + LE}$, c'est à dire, égal au Trapese réctiligne $HLEB$. De même si l'on fait $2AC . KO :: KD + FO . n$. il est clair que $AC \times n$ est égal au Trapese réctiligne $KOFD$. Par conséquent * la difference des réctangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la difference des réctangles $AC \times m$, $AC \times n$; c'est à dire, en divisant par AC, que la difference des arcs paraboliques MN, RS, sera égale à la difference des droites m, n. D'où l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la difference d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que MN, RS.

* Art. 248.

LIVRE SIXIE'ME.

Des Sections Coniques considerées dans le Solide.

CHAPITRE PREMIER.

Des trois Sections Coniques en général.

DE'FINITIONS.

1.

FIG. 129. SI par un point fixe *S* élevé au dessus du plan d'un cercle *VXY*, on fait mouvoir une ligne droite *SZ* indéfiniment prolongée de part & d'autre du point *S*, autour de la circonference du cercle, en sorte qu'elle fasse un tour entier; les deux surfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie *SZ* dans ce mouvement, sont appellées chacune separément *Surface Conique*, & toutes deux ensemble *Surfaces Coniques opposées.*

2.

Le point fixe *S* qui est commun à l'une & à l'autre Surface Conique, est nommé *Sommet.*

3.

Le Cercle *VXY*, *Base.*

4.

Le Solide compris par la base *VXY*, & par la portion de la Surface Conique que cette base coupe depuis le Sommet *S*, est appellé *Cone.*

5.

La ligne *SX* menée du Sommet *S* à un point quelconque *X* de sa base, en est un des *Côtés.*

6.

La ligne *SO* menée du Sommet *S* du Cone par le centre *O* de la base, en est *l'Axe.*

8.

On dit qu'un Cone est *droit*, lorsque son axe est per-

pendiculaire sur le plan de sa base ; & au contraire qu'il est *scalene*, lorsque son axe est oblique sur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan *FAG* qui ne passe point par le Sommet *S*, & qui ne soit point parallele au plan de la base *VXY* ; la ligne courbe *FAG* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, est appellée *Section Conique*. FIG. 130. 131. 132.

9.

Si l'on mene par le Sommet *S* d'un Cone, un plan *SDE* parallele au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie *DE* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la base du Cone, s'appellera *Directrice*.

10.

Une Section Conique *FAG* est appellée *Parabole*, lorsque la Directrice *DE* touche le cercle qui est la base du Cone : *Ellipse*, lorsqu'elle tombe toute entiere au dehors : & *Hyperbole*, lorsqu'elle le traverse.

Mais dans ce dernier cas, si l'on prolonge le plan de la Section, il est visible qu'il rencontrera la Surface Conique opposée ; & la ligne courbe *KMH* formée par cette rencontre, sera nommée *Hyperbole opposée* à la premiere *FAG* ; & les deux ensemble, *Hyperboles ou Sections opposées*. FIG. 132.

11.

Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne droite qui ne la rencontre qu'en un seul point, & qui étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entiere au dehors ; cette ligne sera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Section, point d'*Attouchement*. FIG. 130. 131. 132.

COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone étant prolongés indéfiniment rencontreront necessairement son plan, excepté le seul côté *SD* tiré du Sommet *S* FIG. 130.

par le point *D* où la Diréctrice *DE* touche la base; puisqu'il n'y a que ce côté qui soit dans le plan *SDE* parallele à celui de la Séction, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. D'où il est clair que la Parabole s'étend à l'infini, & ne rentre point en elle-même.

COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. DANS l'Ellipse tous les côtés du Cone étant prolonges, s'il est necessaire, rencontrent son plan; puisque le plan *SDE* qui lui est parallele, est rencontré par tous dans le point *S*. D'où l'on voit qu'elle renferme un espace en rentrant en elle-même.

COROLLAIRE III.

FIG. 132. 252. DANS les Hyperboles opposées tous les côtés du Cone excepté les deux *SD*, *SE*, tirés du Sommet *S* aux points *D*, *E*, où la Diréctrice coupe la base, étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, rencontrent necessairement leur plan; puisqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan *SDE* parallele au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. Les côtés de la portion *SDVE* forment les points de l'Hyperbole *FAG*, & ceux de la portion *SDYE* étant prolongés de l'autre côté du Sommet *S*, forment les points de son opposée *KMH*. D'où l'on voit que les Hyperboles opposées s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles-mêmes, non plus que la Parabole.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 132. 253. S*i l'on coupe deux surfaces Coniques opposées, par un plan* Sam *qui, passant par leur Sommet* S, *entre au dedans; je*

je dis qu'il formera par sa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites Sa, Sm, *indéfiniment prolongées de part & d'autre du point S.*

Car soit *am* la commune Séction du plan coupant, & du plan de la base : il est clair qu'elle rencontrera cette base en deux points *a*, *m*; puisque par la supposition le plan *Sam* entre au dedans de la surface Conique. Or si l'on mene les côtés *Sa*, *Sm*, indéfiniment prolongés de part & d'autre du Sommet *S*; il est évident par la génération des Surfaces Coniques opposées que ces côtés seront les deux communes Séctions de ces deux Surfaces, avec le plan coupant *Sam*. *C'est ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne *am* qui joint les deux points *a*, *m*, de la circonférence, tombe au dedans de la base, & que tout le reste de cette ligne tombe au dehors; il s'ensuit que si l'on conçoit que le plan *Sam* soit indéfiniment étendu tout autour du Sommet *S*, la partie de ce plan qui sera renfermée dans l'angle *aSm*, & dans son opposé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques opposées, & que tout le reste de ce plan tombera entre ou (ce qui est la même chose) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LA il suit que si l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, d'une Séction Conique par une ligne droite, elle sera renfermée au dedans de la Séction; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entiere au dehors. Car menant du Sommet *S* par les points *A*, *M*, les côtés *Sa*, *Sm*, & faisant passer un plan par ces côtés; il est clair que la ligne *AM* tombe dans la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *aSm*, & que tout le reste FIG. 130.

de cette ligne se trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

COROLLAIRE III.

256. Si l'on mene par le Sommet *S* du cone une ligne parallele à une ligne *AM* terminée par une Section Conique; il est clair par le Corollaire précédent que cette ligne *SH*, tombera dans l'un des angles à côté de l'angle *aSm*, c'est à dire au dehors de la surface Conique; & qu'ainsi elle ira rencontrer le plan de la base en quelque point hors la circonference du cercle, ou bien qu'elle lui sera parallele.

COROLLAIRE IV.

FIG. 132. 257. Il suit encore du Corollaire premier que si l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, de deux Hyperboles opposées par une ligne droite, elle sera renfermée entre ces Hyperboles; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet *S* les côtés *Sa*, *Sm*, qui passent par les points *A*, *M*, & faisant passer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point *S*; il est clair que la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *ASM* où tombe la ligne *AM*, est comprise entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui est renfermée entre les deux angles à côté où se trouvent les prolongemens de la ligne *AM*, tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne *AM* est la commune Section du plan *Sam* avec celui des deux Hyperboles opposées, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE V.

258. Il suit aussi des Corollaires deuxiéme & quatriéme, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une

Séction Conique, ou les deux Hyperboles opposées, au plus qu'en deux points.

PROPOSITION II.

Theorême.

259. Si *l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques opposées, par un plan* o v x y *parallele à la base* O V X Y; *je dis que la Séction qu'il forme par sa rencontre avec la Surface Conique, est un cercle qui a pour centre le point* o, *où ce plan rencontre l'axe* S O, *prolongé de l'autre côté du Sommet* S, *lorsqu'il est necessaire.* FIG. 129.

Car si l'on mene par un point quelconque *X* de la base au centre *O* le rayon *XO*, & au Sommet *S* le côté *XS* qui rencontre le plan *ovxy* au point *x*: les lignes *OX*, *ox*, seront paralleles entr'elles; puisqu'elles sont les communes Séctions de deux plans paralleles *OVXY*, *ovxy*, par le même plan *SOX* prolongé, s'il est necessaire de l'autre côté du Sommet *S*. Les triangles *OSX*, *oSx*, seront donc semblables; & par conséquent on aura toûjours *SO*. *OX* :: *So*. *ox*. Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatriéme *ox* ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point *x*. D'où l'on voit que la ligne courbe *vxy* est la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point *o*,

COROLLAIRE.

260. Il suit de là qu'on peut placer la base d'un cone en tel endroit qu'on veut, selon qu'il est plus commode. C'est pourquoi lorsque la Séction est une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en sorte qu'elle coupe la Séction; mais lorsque c'est une Ellipse où la place tantôt de maniére qu'elle la coupe, & tantôt de maniére qu'elle tombe audessous.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 130. 261. *Si dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie* AB *parallele au côté* SD *qui passe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la base; je dis que cette ligne* AB *tombe toute entiere au dedans de la Section, & qu'elle ne le rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de* B.

Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, & par la ligne *AB* un plan *SAB*, il formera par sa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un sera toûjours la ligne *SD*, puisque *AB* lui est parallele; & l'autre la ligne *Sa* qui passe par le point *A*. Or le plan *DSa* renfermé entre les côtés *SD*, *Sa*, prolongés à * *Art.* 254. l'infini du côté de *D* & *a*, tombe* au dedans de la Surface Conique. Par conséquent la ligne *AB* qui est toûjours dans ce plan, étant parallele au côté *SD*, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers *B*.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 130. 262. *Si dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite* AM *qui ne soit point parallele au côté* SD, *qui passe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la base: je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il sera necessaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point* M.

Car si l'on fait passer par le Sommet *S* du cone & par cette ligne un plan *SAM*, il est clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne passe point par

le côté *S D*; d'où il suit que ce plan forme sur la Surface Conique * deux côtés *S a*, *S m*, dont l'un *S a* passe par le point *A*; & l'autre *S m* n'est point parallele au plan de la Section, puisqu'il n'y a (*hyp.*) que le seul côté *S D* qui lui soit parallele. Par conséquent le côté *S m* étant prolongé (s'il est necessaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point *M*, par où passe la ligne *A M* qui est formée par la rencontre du plan *a S m* avec celui de la Parabole. Or il est visible que ce point *M* est un des points de la Parabole *F A G*; puisqu'il se trouve en même temps dans le plan de la Section, & sur la Surface Conique. Donc &c. * *Art.* 253.

PROPOSITION V.

Problême.

263. MENER *d'un point donné* A *sur une Section Conique, une Tangente* A F. Fig. 133. 134. 135.

Ayant mené par le point *A* & par le Sommet *S* du cone, une ligne droite *S A* qui rencontre le plan de la base au point *a*, on tirera à cette base par le point *a*, la Tangente *E a f*; & la ligne *A F* formée par la rencontre du plan *S E a f* (prolongé, s'il est necessaire au delà du Sommet *S*) avec le plan de la Section, sera la Tangente qu'on cherche.

Car puisque la Tangente *E a f* tombe toute entiere au dehors de la base excepté le seul point *a*, il s'ensuit que le plan *S E a f* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S* ne rencontre les Surfaces Coniques opposées que dans la ligne *S a* aussi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, & que tout le reste de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conséquent la ligne *A F* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux Surfaces que le seul point *A* où la ligne *S a* rencontre le plan de la

Section, & tombe toute entiere au dehors excepté ce point. Donc &c.

COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire passer par le point *a* de la base du cone, qu'une seule Tangente *Eaf*; il s'ensuit aussi que d'un point donné *A* sur une Section Conique, on ne peut mener qu'une seule Tangente *AF*.

COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniére de mener une Tangente *AF* parallele à une ligne droite *MN* donnée de position sur le plan d'une Section Conique ou de deux Sections opposées. Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, une parallele *SE* à *MN*, elle rencontrera la Directrice *DE* en un point *E*, ou bien elle lui sera parallele; puisque cette ligne *SE* sera parallele au plan de la Section, & tombera par consequent dans le plan *SDE*. Si elle la rencontre en un point *E* qui tombe au dehors du cercle qui est la base du Cone: ayant mené du point *E* à ce cercle, la Tangente *Eaf*, il est clair que le plan *SEaf* formera par sa rencontre avec le plan de la Section, une Tangente *AF* qui sera parallele à la ligne *MN*; puisque les deux Sections *AF*, *SE*, des plans * paralleles *MAN SED*, coupés par le plan touchant *SEaf*, sont paralleles entr'elles aussi-bien * *SE*, *MN*.

* Hyp.

COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent.

FIG. 153. 1°. Dans la Parabole le Problême est impossible, lorsque la ligne *MN* donnée de position, devient parallele au coté *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base; car alors le point *E* tombant en *D*, on ne pourra mener par ce point d'autre

Tangente que la Diréctrice DE: & comme le plan qui passe par le Sommet & par la Diréctrice DE est * parallele au plan de la Parabole, il ne pourra former par sa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallele au côté SD, on pourra toûjours mener une Tangente AF parallele à cette ligne, & jamais davantage; car alors le point E tombant au dehors du cercle qui est la base du cone, on en pourra toûjours mener Eaf, EDL à cette base; dont l'une EDL se confondant avec la Diréctrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Séction; & l'autre Eaf étant differente de la Diréctrice, servira toûjours à trouver par la rencontre du plan $SEaf$ avec le plan de la Parabole, une Tangente AF qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallele à la Diréctrice, car la Tangente Eaf deviendra alors parallele à la Diréctrice; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallele, puisque la Diréctrice touche elle-même la base en un point D, il s'ensuit &c. * Def. 9.

2°. Dans l'Ellipse, on pourra toûjours mener deux Tangentes AF, BG, paralleles à la ligne MN donnée de position; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Diréctrice DE tombant au dehors de la base, on pourra toûjours mener du point E deux Tangentes Eaf, Ebg, à cette base qui ne se confondront point avec la Diréctrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Séction, deux Tangentes AF, BG, qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallele à la Diréctrice; car au lieu des Tangentes Eaf, Ebg, qui partent d'nn point E de cette Diréctrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes paralleles; ce qui est toûjours possible. FIG. 134.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problême est impossible, lorsque le point E tombe au dedans du cercle qui est la base du cone; puisqu'on ne peut mener FIG. 135.

alors aucune Tangente de ce point à la baſe. Mais lorſqu'il tombe au dehors, on pourra toûjours trouver deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* donnée de poſition ; car la Diréctrice *DE* traverſant la baſe, on pourra toûjours mener du point *E* deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, à cette baſe, leſquelles tombent de part & d'autre de la Diréctrice, & qui ſerviront à former par la rencontre des plans *SEaf*, *SEbg*, avec le plan de la Séction deux Tangentes *AF*, *BG*, qui ſatisferont. Il en eſt de même lorſque la ligne *SE* eſt parallele à la Diréctrice *DE*; car au lieu des deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, il n'y aura qu'à mener deux Tangentes paralleles à la Diréctrice ; ce qui eſt toûjours poſſible.

Il eſt à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes paralleles *AF*, *BG*, appartiennent toûjours aux Hyperboles oppoſées, & jamais à la même ; ce qui eſt évident, puiſque les deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, de la baſe, tombent neceſſairement de part & d'autre de la Diréctrice *DE*.

COROLLAIRE IV.

267. Il ſuit du Corollaire précédent :

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui ſoient paralleles entr'elles ; & qu'au contraire dans l'Ellipſe & dans les Hyperboles oppoſées, une Tangente *AF*, étant donnée de poſition, ou en peut toûjours mener une autre *BG* qui lui ſoit parallele.

2°. Que ſi la ligne *MN* donnée de poſition, eſt terminée par une Séction Conique, on pourra toûjour mener dans la Parabole, une Tangente *AF* qui lui ſoit parallele, & dans l'Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées deux Tangentes *AF*, *BG*; puiſque la ligne *SE* menée

* Art. 256. par le Sommet *S* parallelement à *MN* rencontrera * le plan de la baſe en un point *E* hors la circonference, ou bien lui ſera parallele.

DE'FINITIONS.

12.

Dans une Parabole, si l'on mene par un de ses points quelconques A vers le dedans une ligne AB parallele au côté SD qui passe par le point D où la Diréctrice DE touche la base : cette ligne AB sera nommée *Diametre*, & le point A en sera *l'origine*. FIG. 133.

13.

Dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées, toute ligne droite AB, qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles AF, BG, est appellée *Diametre*; & les points A, B, en sont les extrêmités. FIG. 134. 135.

14.

Si par un point quelconque P de tel Diametre AB qu'on voudra d'une Séction Conique, l'on tire une ligne droite MN qui rencontre la Séction aux points M, N, & qui soit parallele à la tangente AF qui passe par l'origine A de ce Diametre dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ses extremités dans les autres Séctions: on dira que cette ligne MN est *Ordonnée* de part & d'autre au Diametre AB, & que chacune de ses parties PM, ou PN, est *Ordonnée* à ce Diametre. FIG. 133. 134. 135.

15.

Lorsqu'un Diametre fait avec ses Ordonnées des angles droits, on l'appelle *Axe*.

COROLLAIRE.

268. IL suit de la Définition douziéme :

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole sont paralleles entr'eux, puisqu'ils sont tous paralleles au même côté du cône SD qui passe par le point D où la Diréctrice DE touche la base.

2°. Que par un point donné sur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un seul Diametre, puisqu'on ne peut mener par ce point qu'une seule parallele au côté SD.

PROPOSITION VI.

Problême.

*Fig. 136. 137. 138. 269. **Un** *diametre* AB *d'une Section Conique étant donné, avec une de ses ordonnées* PM, *décrire la Section.*

Ayant fait passer par l'ordonnée *PM* un plan quelconque autre que le plan *APM*, on menera dans ce plan par le point *P* une perpendiculaire indéfinie *Pa* à *PM*; & on décrira d'un point quelconque *C* de cette ligne, & du rayon *CM* un cercle. Cela fait,

Fig. 136. 1°. Lorsque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points *a*, *D*, où le cercle coupe la perpendiculaire *Pa* (par exemple du point *a*) par l'origine *A* du diametre *AB*, la ligne *aA* qui rencontre en *S*, une ligne *DS* tirée de l'autre point *D* parallelement à *AB*. On décrira ensuite une surface Conique qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *DMaN*. Je dis qu'elle formera par sa rencontre avec le plan *APM*, la Parabole cherchée *MAN*. Car ayant mené par les extremités du diametre *Da* les paralleles *DE*, *af*, à *PM*; il est clair qu'elles seront tangentes, puisque * *PM* est perpendiculaire sur *Da*. Or le plan *SDE* qui passe par le sommet *S* du cone & par la tangente *DE*, est parallele au plan *APM*, puisque* *SD* est parallele à *AP*, & *DE* à *PM*: d'où il suit* que la Section *MAN* faite par le plan *APM* dans la surface Conique, sera une Parabole qui aura pour diametre la ligne *AB*. De plus le plan touchant *Saf* forme dans le plan *APM* * une tangente *AF*, qui sera parallele à *PM*; puisqu'elle est la commune Section des deux plans *Saf*, *APM*, qui passent par les paralleles *af*, *PM*: & par conséquent* la ligne *PM* sera ordonnée au diametre *AB*.

* *Hyp.*
* *Hyp.*
* *Def.* 10. & 12.
* *Art.* 263.
* *Def.* 14.

Fig. 137. 138. 2°. Lorsque la Section Conique doit être une Ellipse ou une Hyperbole. On menera des points *a*, *b*, où la perpendiculaire indéfinie *Pa* coupe le cercle, par les ex-

tremités *A*, *B*, du diametre *AB*, les droites *aA*, *bB*, qui se rencontrent au point *S*. On décrira ensuite un cone qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *aMbN*. Je dis que le plan *APM* formera dans la surface de ce cone la Séction *MAN* qu'on demande. Car menant *SD* parallele au diametre *AB* de la Séction, & qui rencontre en *D* le diametre *ab* de la base, par où & par les extremités *a*, *b*, soient tirées les paralleles *DE*, *af*, *bg*, à *PM*; il est clair que le plan *SDE* sera parallele au plan *APM*, & qu'ainsi *DE* * sera la Diréctrice. Or dans l'Ellipse le point *D* tombe sur le diametre *ab* prolongé hors le cercle; puisque le diametre *AB* de la Séction, tombe dans l'angle *aSb* fait par les côtés du cone *Sa*, *Sb*: & au contraire dans l'Hyperbole le point *D* tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diametre *AB* tombe dans l'angle *aSB* qui est à côté de l'angle *aSb*. D'où il suit selon la Définition 10. que la Séction *MAN* est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente *AF* qui passe par l'extremité *A* du diametre *AB*, étant la commune Séction du plan touchant *Saf* & du plan coupant *APM*, qui passent par les paralleles *af*, *PM*, sera parallele à *PM*: & de même la tangente *BG* étant la commune Séction du plan touchant *Sbg* & du plan coupant *APM*, lesquels passent par les deux paralleles *bg*, *PM*, sera aussi parallele à *PM*. D'où l'on voit que la ligne *AB* est * un diametre qui a pour ordonnée *PM*.

* Def. 9.

* Def. 13. & 14.

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes *Aa*, *Bb*, soient paralleles entr'elles; mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre *C* du cercle *aMbN*, tel autre point qu'on voudra de la ligne *ab*.

DÉFINITION.

16.

Si par les deux points *D*, *E*, où la Diréctrice coupe la base, lorsque la Séction est une Hyperbole, on tire FIG. 139.

deux Tangentes *DH*, *EK*; & que par le Sommet *S* & ces Tangentes, on fasse passer deux plans *SDH*, *SEK*: les deux lignes droites indéfinies *CH*, *CK*, que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, sont appellées *Asymptotes*.

COROLLAIRE I.

270. Si par un point d'attouchement *D*, l'on mene le côté *DS* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*: il est visible que le plan *SDH* ne peut avoir de commun avec les deux surfaces Coniques opposées que ce côté; puisque tous les points de la Tangente *DH* tombent hors la circonference de la base, excepté le seul point *D*. Or le plan *SDE* qui passe par le Sommet *S* & par la Diréctrice *DE*, étant * parallele au plan des Hyperboles opposées, les communes Séctions *SD*, *CH*, de ces deux plans avec le même plan *SDH* seront paralleles entr'elles; c'est pourquoi l'Asymptote *CH* tombera toute entiere au dehors & entre les deux surfaces Coniques opposées, & laissera par conséquent les Hyperboles opposées toutes entieres de part & d'autre sans les rencontrer. On prouvera la même chose de l'autre Asymptote *CK*. Or comme les deux Asymptotes *CH*, *CK*, sont formées par les plans *SDH*, *SEK*, qui tombent de part & d'autre de la même surface Conique & de son opposée; il s'ensuit que tous les points de l'Hyperbole *FAG* sont compris dans l'angle *HCK*, & que tous les points de son opposée tombent dans l'angle qui lui est opposé au Sommet.

* Def. 9.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 139.

271. Si *par un point quelconque* B *d'une Asymptote* CK, *l'on mene une parallele* BA *à l'autre Asymptote* CH; *je dis*

qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles opposées en un seul point A, *& qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.*

Puiſque les deux lignes *BA*, *SD*, ſont paralleles à la même ligne *CH*, elles le ſeront entr'elles; & ainſi elles ſe trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux ſurfaces Coniques oppoſées, puiſqu'il paſſe par l'un de leurs côtés *SD*, & qu'il fait un angle avec le plan *SDH* qui la touche dans ce côté. Le plan des paralleles *BA*, *SD*, formera donc dans les deux ſurfaces Coniques, deux côtés, dont l'un eſt le coté *SD*, & l'autre le côté *Sa*, qui coupera neceſſairement la ligne *BA* en quelque point *A*, puiſqu'il eſt ſitué dans le plan qui paſſe par les paralleles *SD*, *AB*, & qu'il coupe *SD* en *S*. Donc puiſque le point *A* ſe trouve en même temps dans l'une des ſurfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles. De plus puiſque la ligne *BA* étant prolongée indéfiniment du côté du point *A*, tombe toute entiere dans le plan *DSa* renfermé entre les côtez *DS*, *Sa*, lorſque le point *A* appartient à l'Hyperbole *FAG*, & dans ſon oppoſé au Sommet *ASd* lorſqu'il appartient à l'Hyperbole oppoſée; il eſt viſible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux ſurfaces Coniques, & par conſéquent auſſi au dedans de l'Hyperbole qui en eſt la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole *FAG* & ſon Aſymptote *CH*, on ne ſçauroit faire paſſer aucune ligne parallele à cette Aſymptote. Or comme la ligne *BA* ſepare l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indefinies, dont l'une tombe neceſſairement toute entiere dans l'eſpace compris entre les paralleles *BA*, *CH*; il s'enſuit que plus *CB* deviendra petite, plus le point *A* avancera dans cette portion, & cela toûjours de plus en plus juſqu'à ce que *CB* devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'est à dire, qu'une Hyperbole & son Asymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toûjours de plus en plus, en sorte que leur distance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, sans pouvoir

* *Art.* 270. neanmoins * jamais se rencontrer.

PROPOSITION VIII.

Problême.

Fig. 140. 273. LES *Asymptotes* CH, CK, *d'une Hyperbole* FAG *étant données avec un de ses points quelconques* F, *décrire l'Hyperbole.*

Ayant mené par le point donné F, une ligne droite quelconque HK terminée par les asymptotes, on fera passer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan HCK, dans lequel on tirera par le point de milieu P de HK une perpendiculaire indéfinie MN à cette ligne; & on décrira d'un de ses points quelconques O comme centre, & du rayon OF, un cercle FMN. On menera des points H, K, deux Tangentes HD, KE, à ce cercle; & par les points d'attouchemens D, E, deux paralleles DS, ES, aux Asymptotes CH, CK, lesquelles se rencontreront en un point S; duquel comme Sommet, on décrira une surface Conique qui ait pour base le cercle FMN. Je dis que cette surface Conique formera par sa rencontre avec le plan HCK, l'Hyperbole requise FAG.

Il est clair par la proprieté du cercle FMN; 1°. Que la corde FG est divisée par le milieu au point P, par le

* *Hyp.* diametre MN qui lui est * perpendiculaire; & partant, puisque par la construction $PH = PK$, il s'ensuit que $FH = GK$, $GH = FK$; & par conséquent $GH \times HF = FK \times KG$. 2°. Que $GH \times HF = \overline{HD}^2$, & $FK \times KG = \overline{KE}^2$, & qu'ainsi $HD = KE$. 3°. Que si l'on prolonge les Tangentes HD, KE, jusqu'à ce qu'elles se ren-

contrent en un point *Q*, les parties *DQ*, *EQ*, seront égales entr'elles. Ce qui donne *DQ*. *EQ* :: *DH*. *EK*. D'où l'on voit que la ligne *DE* qui joint les points d'attouchemens des deux Tangentes *HD*, *KE*, sera parallele à la ligne *HK*, & le plan *SDE* au plan *CHK*: c'est pourquoi la ligne *DE* sera * la Diréctrice; & comme elle coupe la base en deux points, la Séction Conique *FAG* * sera une Hyperbole. De plus il est évident que cette Hyperbole passera par le point donné *F*, puisque ce point est commun tant à la surface Conique, qu'au plan *HCK* qui est celui de l'Hyperbole; & qu'elle aura pour Asymptotes les lignes *CH*, *CK*, puisqu'elles sont * les communes Séctions des plans touchans *SDH*, *SEK*, & du plan de l'Hyperbole.

* *Def.* 9.
* *Def.* 10.
* *Def.* 15.

S'il arrivoit que les Tangentes *DH*, *EK*, fussent paralleles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes *DE*, *HK*, seroient paralleles entr'elles, puisque ces Tangentes sont égales; & le reste se démontreroit de la même maniere que ci-dessus.

PROPOSITION IX.

Theorême.

274. S'IL *y a deux lignes droites* MN, AB, *terminées par une Séction Conique ou par les Séctions opposées*, *lesquelles se rencontrent en un point* P; *& qui soient paralleles à deux autres lignes*, SE, SD, *données de position: je dis que le réctangle* MP×PN *est au réctangle* AP×PB, *en raison donnée; c'est à dire que la raison de ces deux réctangles demeure toûjours la même, en quelque endroit que puisse tomber les deux lignes* MN, AB. FIG. 141. 142.

Ayant mené par les paralleles *SE*, *MN*, & *SD*, *AB*, deux plans, ils formeront dans le plan de la base, deux lignes droites *Enm*, *Dba*, & dans la surface Conique les côtés *SMm*, *SNn*, *SAa*, *SBb*; & leur commune interséction sera la ligne *SPp*, qui rencontre le plan de

la base au point p, où les deux droites Em, Da, s'entrecoupent ; par lequel je mene dans le plan SMN la droite HK parallele à MN, & dans le plan SAB la droite FG parallele à AB. Cela posé.

Les triangles semblables SPM, SpH; SPN, SpK; SPA, SpF; SPB, SpG, donnent $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: AP \times PB . Fp \times pG$. Et partant on aura $MP \times PN . AP \times PB :: Hp \times pK . Fp \times pG$. Or la raison de $Hp \times pK$ à $Fp \times pG$, est composée des deux raisons de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, & de $mp \times pn$ ou par la proprieté du cercle $ap \times pb$ à $Fp \times pG$. Mais à cause des triangles semblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, il vient $Hp . mp :: SE . mE$. Et $pK . pn :: SE . En$. Et en multipliant les Antecedens & les Conséquens de ces deux raisons, $Hp \times pK . mp \times pn :: \overline{SE}^2 . mE \times En$: on prouvera de même à cause des triangles semblables Fpa, SDa, & Gpb, SDb, que $ap \times pb . Fp \times pG :: aD \times Db . \overline{SD}^2$. Il est donc évident que la raison de $MP \times PN$ à $AP \times PB$, est composée des deux raisons de $\overline{SE}^2$ à $mE \times En$, & de $aD \times Db$ à $\overline{SD}^2$; lesquelles par la proprieté du cercle qui est la base du cone, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites MN, AB, parce que les points E, D, ne changent point. Donc le réctangle $MP \times PN$ est au réctangle $AP \times PB$ en raison donnée. *Ce qu'il fal. &c.*

COROLLAIRE.

FIG. 143. 144. 275. DE-LA on voit que si dans une Séction Conique, où entre les Séctions opposées, il y a deux lignes droites MN, OR, paralleles entr'elles & qui rencontrent aux points P, Q, une troisiéme ligne droite AB aussi terminée par la Séction ; on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP \times PB . AQ \times QB$.

PROP.

PROPOSITION X.

Theorême.

276. S*i par un point quelconque* A *d'une Parabole ou d'une Hyperbole* MAN, *l'on tire une ligne droite* AB *parallele au côté du cone* SD, *mené dans la Parabole par le point* D *où la Directrice touche la base, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre ; & que par un point quelconque* P *de cette ligne, l'on tire une ligne* MN *parallele à une ligne* SE *donnée de position, & terminée par la Section ou par les Sections opposées, avec une autre ligne* FG *parallele à la ligne* Da *commune Section du plan* SAB *avec celui de la base, & terminée par les côtés* Sa, SD: *je dis que la raison du rectangle* MP×PN *au rectangle* FP×PG *est donnée, c'est à dire qu'elle demeure toûjours la même, en quelque endroit de la ligne* AB *que tombe le point* P. FIG. 145.

Ayant mené par les paralleles SE, MN, un plan: il formera dans celui de la base une ligne droite Enm; dans la surface Conique les côtés SMm, SNn; & dans le plan SDa la ligne SPp qui rencontre la base au point p, où les lignes Em, Da, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan SMN la ligne HK parallele à MN. Cela posé, les triangles semblables SPM, SpH; SPN, SPK; SPF, Spa; SPG, SPD donneront $MP \times PN. Hp \times pK :: \overline{SP}^2. \overline{Sp}^2 :: FP \times PG. ap \times pD$, ou par la proprieté du cercle $mp \times pn$. Et partant on aura $MP \times PN. FP \times PG :: Hp \times pK. mp \times pn$. Mais la raison de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, est composée des deux raisons de Hp à pm, & de pK à pn, c'est à dire, à cause des triangles semblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, des deux raisons de SE à Em, & de SE à En; & par conséquent $Hp \times pK. mp \times pn$, ou $MP \times PN. FP \times PG :: \overline{SE}^2. mE \times En$. Donc puisque le point E ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point P, & que tous les réctangles $Em \times En$ sont égaux

par la proprieté du cercle; il s'ensuit que $MP \times PN$ est à $FP \times PG$ en raison donnée. *Ce qu'il faloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Fig. 146. 277. DE-LA il est évident que si par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN, l'on mene dans la Parabole un diametre AB, & dans l'Hyperbole une parallele AB à l'une de ses Asymptotes; & que par deux points quelconques P, Q, de la ligne AB, l'on tire deux paralleles MN, OR, terminées par la Section ou par les Sections opposées; on aura $MP \times PN. OQ \times QR :: AP. AQ.$

Car menant le plan SAB qui forme par sa rencontre avec la surface Conique les côtés SD, Sa, entre lesquels le côté SD passera par le point où la Directrice touche la base lorsque la Section est une Parabole, & par l'un des deux points où la Directrice la rencontre lorsque c'est une Hyperbole; & tirant dans le plan SDa par les points P, Q, les droites FG, TV, paralleles à Da: il est clair par la Proposition précédente que $MP \times PN. FP \times PG :: OQ \times QR. TQ \times QV.$ Et qu'ainsi $MP \times PN. OQ \times QR :: FP \times PG. TQ \times QV.$ Or les parties PG, QV, des lignes FG, TV, sont égales entr'elles; puisque les lignes AB, SD, sont paralleles. Et partant $MP \times PN. OQ \times QR :: FP. TQ :: AP. AQ.$ à cause des triangles semblables APF, AQT. Donc &c.

CHAPITRE II.

De l'Ellipse en particulier.

DÉFINITIONS.

17.

Fig. 147. Si une ligne droite indéfinie SZ qui est hors le plan d'un cercle VXY, se meut par un de ses points X autour de la circonference de ce cercle toûjours paralle-

lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenuë au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne SZ dans ce mouvement, est appellée *Surface cylindrique.*

18.

Cette ligne SZ en chaque differente position, en est toûjours appellée le *Côté.*

19.

Le cercle VXY, la *Base.*

20.

La droite indéfinie CO menée du centre C de la base parallelement aux côtés, en est *l'Axe.*

21.

Le solide indéfini compris par la base VXY & par la Surface cylindrique, est appellé *Cylindre.*

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallele à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe $AMBN$ formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appellée *Séction cylindrique.*

PROPOSITION XI.

Theorême.

278. S*i l'on coupe un cylindre par un plan* uxy *parallele au plan de la base* VXY ; *la Séction* vxy *sera un cercle qui aura pour centre le point* c *où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne* cx *égale au rayon* CX *de la base.* FIG. 147.

Car menant par un point quelconque x de la Séction vxy un côté xX de la Surface cylindrique, il sera parallele * à l'axe Cc : c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans paralleles $CVXY$, $cvxy$, deux droites CX, cx, paralleles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre * Def. 20.

les paralleles *Cc*, *Xx*. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Section *vxy* qu'on prenne le point *x*, il s'enſuit que toutes les lignes *cx* menées du point *c*, aux points *x* de la Section *vxy*, ſont égales aux rayons *CX* de la baſe : c'eſt à dire que la Section *vxy* ſera la circonference d'un cercle, qui aura pour centre le point *c*, où le plan *vxy* rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne *cx* égale au rayon *CX* de la baſe. *Ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XII.

Theorême.

FIG. 148. 279. TOUTE *Ellipſe peut être regardée comme une Section cylindrique.*

Ayant mené dans la baſe du cone où eſt produite un Ellipſe quelconque, le diametre *ab* qui rencontre à angles droits au point *D* la Directrice *DE*, ſoient tirés ſur la ſurface Conique les côtez *Sa*, *Sb*, qui rencontrent le plan de l'Ellipſe aux points *A*, *B*; & dans les plans paralleles *AMB*, *SDE*, les droites *AB*, *SD*. Ayant pris *DF* moyenne proportionnelle entre *aD*, *Db*, & mené à *SF* les paralleles *AG*, *BH*, ſoit décrit ſur le plan de la baſe du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne *GH*, & une ſurface cylindrique qui ait pour baſe ce cercle, & pour côtés les droites *AG*, *BH*. Cela poſé.

Je dis que ſi par un point quelconque *P* de la ligne *AB*, l'on tire à la Directrice *DE*, une parallele qui rencontre la ſurface Conique en *M*, & la Cylindrique en *O*; les points *M*, *O*, ſe confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un ſeul.

Car ayant fait paſſer par cette parallele un plan parallele au plan des deux baſes tant du cone que du cylindre, il formera ſur la ſurface Conique * un cercle *KML* dont le centre ſera la commune Section de ce

* Art. 259.

plan avec l'axe du cone, & sur la surface Cylindrique * un autre cercle QMR dont le centre sera la commune Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le plan Sab passe * par l'axe du cone, & le plan $AGHB$ (qui ne fait qu'un seul plan avec celui du triangle Sab) par l'axe * du cylindre; & par conséquent les lignes KL, QR, communes Sections de ces deux plans, avec le plan parallele (à la base) qui passe par la ligne POM, seront les diametres de ces deux cercles; & cette ligne POM sera perpendiculaire à ces diametres, puisqu'elle est * parallele à DE qui est * perpendiculaire à ab & à GH qui ne font * qu'une même ligne, à laquelle les diametres KL & QR qui ne font aussi qu'une même ligne, sont paralleles. De plus les lignes AB, SD, étant formées par les rencontres du même plan Sba avec deux plans paralleles entr'eux; sçavoir, le plan SDE & celui de l'Ellipse, seront aussi paralleles entr'elles. Ceci bien entendu,

* Art. 278.
* Def. 6.
* Def. 20.
* Hyp.
* Hyp.
* Hyp.

1°. Dans le cone, à cause du cercle KML, on aura $\overline{PM}^2 = KP \times PL$; & à cause des triangles semblables APK, SDa, & PBL, SDb, il vient $AP. KP :: SD. aD$. Et $PB. PL :: SD. Db$. D'où il suit que $AP \times PB. KP \times PL$ ou $\overline{PM}^2 :: \overline{SD}^2. aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cause du cercle QOR, on aura $\overline{PO}^2 = QP \times PR$; & à cause des triangles semblables APQ, SDF, & PBR, SDF, on formera ces deux proportions $AP. QP :: SD. DF$. Et $PB. PR :: SD. DF$. D'où il suit que $AP \times PB. QP \times QR$ ou $\overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2. \overline{DF}^2$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2$, & $PM = PO$. Donc les points M, O, se confondent l'un avec l'autre, & n'en font qu'un seul. Donc, puisque cela arrive toûjours en quelque endroit de la ligne AB que l'on prenne le point P, il s'ensuit que le plan de l'Ellipse rencontre les surfaces Coniques & Cylindriques dans les mêmes points, & qu'ainsi toute Ellipse peut toûjours être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre est moins composé qu'un cone, en ce que tous ses côtés sont paralleles entr'eux ; au lieu que dans le cone ils aboutissent tous au même point qui en est le sommet ; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipse comme la Séction d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les proprietés de tous ses diametres ; & que se servant ensuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre suivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes choses dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

FIG. 149. 280. TOUS *les diametres d'une Ellipse passent par un seul & unique point, qui est celui où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre ; & y sont coupés en deux parties égales.*

Et réciproquement toutes les lignes qui passent par ce point, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse ; y sont coupées en deux également, & en sont des diametres.

On nomme ce point le *Centre* de l'Ellipse.

1°. Soit AB un diametre quelconque, & C le point où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes Aa, Bb, paralleles à l'axe Cc, il est clair * qu'elles seront des côtés de la surface cylindrique, & que les deux plans FAa, GBb, qui passent par ces deux lignes, & par les deux tangentes AF, BG, qui selon la définition des diametres, doivent être paralleles entr'elles, seront paralleles entr'eux, & toucheront la surface cylindrique dans les côtés Aa, Bb ; d'où il suit que ces deux plans formeront dans le plan de la base deux lignes af, bg, paralleles entr'elles, &

*Def. 20.

qui toucheront la base aux points a, b, où les côtés Aa, Bb, la rencontrent. Or il est démontré dans les Elemens de Geometrie, que la ligne ab qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles af, bg, d'un cercle, passe par son centre c. Partant le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre; & la ligne AB, qui est la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipse, passera par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse. De plus à cause des paralleles Aa, Bb, Cc; il est évident que le diametre AB de l'Ellipse, est divisé en deux également au point C; puisque le diametre ab du cercle l'est au point c qui en est le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités A, B, d'une ligne quelconque AB, qui passe par le point C où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe Cc du cylindre, les lignes Aa, Bb, paralleles à cet axe; il est clair selon la définition 17. de la surface cylindrique, qu'elles en seront des côtés, & que le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre. D'où l'on voit que la ligne ab commune Section de ce plan & de celui de la base, passe par le centre c de la base; & qu'ainsi, puisqu'elle y est coupée en deux également, la ligne AB la sera aussi au point C. De plus les tangentes af, bg, qui passent par les extremités du diametre ab étant paralleles entr'elles; les plans touchans faA, gbB, seront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipse deux lignes paralleles AF, BG, qui la toucheront aux extremités A, B, de la ligne AB, qui en sera par conséquent un diametre. *C'est ce qu'il falloit démontrer en second lieu.*

COROLLAIRE.

281. DE-LA il est évident que par un point donné sur le plan d'une Ellipse autre que le centre, on ne peut faire passer qu'un seul diametre.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

FIG. 149. 282. TOUTE *ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre en un point* P.

Et réciproquement si une ligne quelconque MPN *terminée par une Ellipse & qui ne passe point par le centre* C, *est coupée en deux également en* P, *par un diametre* AB; *elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.*

Ayant mené par les points *A*, *B*, *M*, *N*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Mm*, *Nn*, paralleles à l'axe *Cc* du cylindre, & qui rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *m*, *n*; la ligne *Pp* commune Section des deux plans *AabB*, *MmnN*, sera parallele aux côtés du cylindre, puisque tous les côtés sont paralleles entr'eux. De plus le plan *AabB* passera par l'axe *Cc* du cylindre, puisque le diametre *AB* passe par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse; & il formera par conséquent dans le plan de la base une ligne *ab* qui passera par le centre *c*, c'est à dire, un diametre. Cela posé.

Puisque par la supposition la ligne *MPN* est ordonnée de part & d'autre au diametre *AB*, elle sera parallele aux tangentes *AF*, *BG*, qui passent par les extremités de ce diametre; & par conséquent les plans touchans *FAa*, *GBb*, seront paralleles au plan *MmnN*. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la base; sçavoir les deux tangentes *af*, *bg*, & la ligne *mn*, seront donc paralleles entr'elles; & ainsi la ligne *mn* sera perpendiculaire au diametre *ab*, qui la divisera par conséquent en deux parties égales au point *p*. D'où il suit à cause des paralleles *Mm*, *Pp*, *Nn*, que la ligne *MN* sera aussi divisée en deux parties égales au point *P*.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans

dans le plan de l'Ellipse deux tangentes *AF*, *BG*, * paralleles à *MN*; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre *AB*, il est clair selon les définitions 13. & 14. que cette ligne *MN* sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre, & par conséquent (selon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en *P* par ce même diametre. Or comme l'on ne peut mener par le point *P* * qu'un seul diametre, il s'ensuit que si une ligne *MN* terminée par une Ellipse, & qui ne passe point par le centre *C*, est coupée en deux également en *P* par un diametre *AB*, elle lui sera ordondonnée de part & d'autre.

* Art. 267.

* Art. 281.

PROPOSITION XV.

Theorême.

283. S'IL *y a dans une Ellipse deux diametres* AB, DE; *dont l'un d'eux* DE *soit parallele aux Tangentes* AF, BG, *qui passent par les extremités de l'autre* AB: *je dis réciproquement que le diametre* AB *sera parallele aux Tangentes qui passent par les extremités du diametre* DE. FIG. 149.

Les deux diametres *AB*, *DE*, sont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points *A*, *B*, *D*, *E*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, du cylindre, lesquels rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *d*, *e*; les plans *AabB*, *DdeE*, passeront par l'axe *Cc* du cylindre, puisque les lignes *AB*, *DE*, sont des diametres de l'Ellipse; & formeront par conséquent dans le plan de la base, deux diametres *ab*, *de*. Or le plan touchant *FAa* étant parallele au plan *DdeE*, formera dans le plan de la base une Tangente *af* parallele au diametre *de*, lequel diametre sera par conséquent perpendiculaire sur le diametre *ab*. Si donc l'on mene par l'une des extremités *d* du diametre *de* une Tangente *dh* au cercle, elle sera parallele au diametre *ab*, & le plan *hdD* parallele au

plan $AabB$: c'est pourquoi les communes Sections de cês deux plans avec le plan de l'Ellipse, sçavoir la Tangente DH & le diametre AB, sont paralleles entr'elles. On prouvera la même chose à l'égard de la Tangente qui passe par l'autre extremité E du diametre DE. Donc &c.

COROLLAIRE I.

284. De-la il est évident que s'il y a deux diametres conjugués AB, DE, dans une Ellipse; les deux plans qui passent par ces diametres & par l'axe Cc du cylindre, formeront dans le plan de la base deux diametres ab, de, qui seront perpendiculaires entr'eux; ce qui est réciproque.

COROLLAIRE II.

285. Il suit encore de cette Proposition que si par un point quelconque P d'un diametre AB, on mene une ordonnée MPN de part & d'autre, elle sera parallele au diametre DE qui lui est conjugué; & qu'ainsi
* Art. 275. on aura * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2$. $DC \times CE$ ou $\overline{DC}^2$ :: $AP \times PB$. $AC \times CB$ ou $\overline{AC}^2$. Ce qui donne $\overline{PM}^2$. $AP \times PB$ :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AC}^2$ :: $4\overline{DC}^2$ ou $\overline{DE}^2$. $4\overline{AC}^2$ ou $\overline{AB}^2$. C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MP à un diametre AB, est au réctangle $AP \times PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre DE qui lui est conjugué, est au quarré du diametre AB.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

FIG. 150. 286. *Si par un point quelconque* M *d'une Ellipse* AMB, *l'on mene une* Tangente FMG *qui rencontre aux points* F, G, *deux autres Tangentes* AF, BG, *paralleles entr'elles : je dis que* FM. MG :: AF. BG.

Ayant mené par les points d'attouchemens A, B, M, les côtés Aa, Bb, Mm, du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes AF, BG, FG, les trois plans FAa, GBb, FMm, ou GMm; il est clair que les communes Sections Ff, Gg, des deux premiers plans avec le troisiéme, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans FMm, FAa, passant par les côtés Mm, Aa, qui sont paralleles entr'eux, leur commune Section Ff sera parallele à ces côtés; & par la même raison Gg commune Section des deux plans GBb, GMm, sera parallele aux côtés Bb, Mm. De plus les lignes af, bg, que forment les plans touchans paralleles FAa, GBb, dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties fm, mg, de la troisiéme Tangente formée dans le plan de la base par le troisiéme plan touchant FMm, ou GMm, seront égales (par la proprieté du cercle) aux Tangentes af, bg; sçavoir, fm à fa, & mg à gb. Cela posé.

A cause des lignes Aa, Ff, Mm, Gg, Bb; & AF, BG; & af, bg, qui sont paralleles entr'elles, on aura $FM. MG :: fm$ ou $fa. mg$ ou $gb :: FA. GB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

287. SI l'on mene par les points d'attouchement A, B, des deux Tangentes paralleles entr'elles AF, BG, un diametre AB qui rencontre en T la Tangente FMG, & qu'on tire l'ordonnée MP à ce diametre: il est évident que $AP. PB :: FM. MG :: AF. BG :: AT. BT$. Et qu'ainsi $PB - AP. PB :: BT - AT$ ou $AB. BT$.

COROLLAIRE II.

288. DE-LA on tire la maniére suivante de mener d'un point donné M sur une Ellipse la Tangente MT, un diametre AB étant donné avec la position de ses ordonnées.

De l'une des extremités B du diametre AB, soit tirée au point donné M la droite BM. Puis ayant mené l'ordonnée MP au diametre AB, & pris sur ce diametre du côté de B la partie PH égale à PA, soit tirée HK parallele à PM, rencontrant la ligne BM en K, par ou & par l'autre extremité A soit menée AK. Soit enfin tirée MT parallele à AK, elle sera la Tangente qu'on cherche.

Car à cause des paralleles MP, HK, & AK, MT, l'on aura BP. PH. ou PA :: PM. MK :: BT. TA.

COROLLAIRE III.

289. S'IL y a dans une Ellipse deux Tangentes MT, NT, qui se rencontrent en un point T; je dis que le diametre AB qui passe par le point P milieu de la ligne MN qui joint les deux points d'attouchement, passera aussi par le point T. Car PN est ordonnée au diametre AB de même que PM; & par consé-
* Art. 287. quent * les Tangentes MT, NT, iront chacune rencontrer ce diametre en un point T, tel que $PB - AP$. PB :: AB. BT; c'est à dire dans le même point.

COROLLAIRE IV.

290. SI l'on joint dans une Ellipse les points d'attouchemens M, N, de deux Tangentes MF, NL, par une ligne droite MN; & qu'il y ait une troisiéme Tangente FAL parallele à MN: je dis que les parties FA, AL de cette derniere Tangente, prises entre son point d'attouchement A & les deux premieres, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement A le diametre AB, il est clair que la ligne MN est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, puisqu'elle est parallele à la Tangente FL qui passe par son extremité A; & qu'ainsi il la coupe par le milieu en
* Art. 289. P, & passe * par conséquent par le point de rencontre

T des deux Tangentes *MF*, *NL*; où bien il leur sera parallele, si la ligne *MN* est * un diametre. Or il est visible en l'un & l'autre cas, que *FL* sera divisé en deux partie égales au point *A* par le diametre *AB*; puisque *MN* l'est en *P* par ce même diametre. * Art. 285.

CHAPITRE III.

De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.

PROPOSITION XVII.

Theorême.

291. DANS *une Parabole toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre au point P: ce qui est réciproque.* FIG. 151.

Ayant fait passer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant *SDE* parallele au plan Parabolique, une Tangente *DE* parallele à *MN*. De plus le plan *SAF* mené par le Sommet *S* du cone, & par la Tangente *AF* qui passe par l'origine *A* du diametre *AB*, formera dans le plan Elliptique une Tangente *af*; & la ligne *Da* qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes *DE*, *af*, passera par le point *P*; puisque le diametre *AB* est parallele au côté touchant *SD*. Cela posé.

Puisque par la supposition * les deux lignes *AF*, *MN*, sont paralleles entr'elles; il s'ensuit que la Tangente *af*, qui est la commune Section de deux plans qui passent par ces deux lignes, sera parallele à *MN*; & par conséquent à *DE*. D'où l'on voit * que la ligne *Da*, qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes paralleles *DE*, *af*, est un diametre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne *MN* qui est parallele à ces Tangentes & terminée par l'Ellipse, sera * divisée en deux également au point *P*. * Def. 14. * Def. 15. * Art. 282.

Maintenant pour prouver la converse, on menera

* *Art.* 267. dans le plan de la Parabole * une Tangente AF parallele à la ligne MN; & ayant tiré par le point d'attouchement A un diametre AB, il aura pour ordonnée
* *Def.* 14. de part & d'autre * la ligne MN, qu'il divisera par conséquent en deux parties égales au point P selon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un seul dia-
* *Art.* 268. metre * qui puisse passer par le point de milieu P de la ligne MN, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE.

292. DE-LA il est évident que si l'on mene par deux points quelconques P, Q, d'un diametre AB deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR; on aura
* *Art.* 277. toûjours * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2$ :: AP. AQ. C'est à dire que les quarrés de deux ordonnées quelconques PM, QO, à un diametre AB, seront toûjours entr'eux, comme les parties AP, AQ, de ce diametre prises depuis son origine A jusqu'à ces mêmes ordonnées.

PROPOSITION XVIII.

Theorême.

FIG. 151. 293. S*i par un point quelconque* M *d'une Parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* AB *qu'on voudra, & une Tangente* MT *qui rencontre en* T *ce diametre prolongé au delà de son origine* A : *je dis que ses parties* AP, AT, *seront égales.*

La même préparation étant faite que dans la Proposition précédente, soit de plus mené par le Sommet S du cone & par la Tangente MT, le plan touchant STM qui formera dans le plan Elliptique la Tangente MH, laquelle rencontrera le diametre Da de l'Ellipse en un point H par ou passera la ligne ST; & soit enfin tirée la droite TG paralléle à SA. Ceci bien en-
* *Art.* 287. tendu, on aura * DH. Ha :: DP. Pa, & (*alternando*)

$DH. DP :: Ha. Pa$. Mais à cause des paralleles AB, SD, & SA, TG; il est clair que $DH. DP :: SH. ST :: Ha. Ga$. Donc $Ha. Pa :: Ha. Ga$. Donc aussi $Pa = Ga$; & par conséquent $AP = AT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIX.

Theorême.

294. DANS *les Hyperboles opposées tout diametre* A B *passe par le point d'intersection* C *des deux asymptotes, & y est coupé en deux également : ce qui est réciproque.* FIG. 152.

On nommera ce point, *Centre.*

Soit HSh une des deux communes Sections du plan parallele au plan Hyperbolique, & des deux surfaces Coniques opposées; & soit l'Asymptote FG formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux surfaces en cette ligne HSh. Soient menées par les Tangentes paralleles AF, BG, qui passent par les extremités du diametre AB, & qui rencontrent l'Asymptote FG aux points F, G, deux plans Elliptiques paralleles; ils formeront dans le plan touchant qui passe par le côté HSh, les Tangentes paralleles FH, Ghf, & dans le plan touchant SAF les Tangentes paralleles AF, af.

Cela posé, les lignes paralleles FH, Gh, étant renfermées entre les deux autres paralleles FG, Hh, seront égales entr'elles ; & les triangles semblables SHF, Shf, & SFA, Sfa, donneront cette proportion, $HF. hf :: SF. sf :: FA. fa$. Et partant $HF. FA :: hf. fa ::$* $hG. GB$. Donc puisque $HF = hG$, il s'ensuit que $AF = BG$; & à cause des triangles semblables ACF, BCG, que $AC = CB$: c'est à dire que l'Asymptote FG passe par le point de milieu C du diametre AB. On prouvera de même que l'autre Asymptote passera encore par le point de milieu C du diametre AB; d'où l'on voit que le diametre AB passe par le * Art. 286.

point d'interſéction *C* des deux Aſymptotes, & y eſt coupé en deux parties égales.

Soit à preſent une ligne *AB* qui paſſant par le point d'interſéction *C* des deux Aſymptotes, rencontre les Hyperboles oppoſées aux points *A*, *B*. Si l'on mene par le point *A* la Tangente *AF*, & à l'Hyperbole op-

* *Art.* 267. poſée une Tangente *DG* * parallele à *AF*; il eſt clair parce qu'on vient de prouver que la ligne *AD* qui joint les point d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diametre, paſſera par le point d'interſéction *C* des Aſymptotes. Elle ſe confondra donc avec la ligne

* *Hyp.* *AB* qui paſſe auſſi * par les deux mêmes points *A*, *C*: c'eſt à dire que le point *D* tombera ſur le point *B*. C'eſt pourquoi cette ligne *AB* ſera un diametre, & partant coupée en deux parties égales au point *C*.

COROLLAIRE.

295. DE-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un ſeul diametre; puiſqu'il n'y a qu'une ſeule ligne qui puiſſe paſſer par ce point, & par le centre.

PROPOSITION XX.

Theorême.

FIG. 153. 296. DANS *les Hyperboles oppoſées toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui eſt reciproque.*

Ayant fait paſſer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans *SAF*, *SBG*, deux Tangentes *af*, *bg*; & la ligne *ab* qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Séction du plan Elliptique & du plan *SAB*, paſſera par le point *P*. Or puiſque par la ſuppoſition les

les deux lignes *AF*. *MN*, sont paralleles, il s'ensuit que la ligne *af* qui est la commune Section de deux plans, qui passent par ces deux lignes, sera parallele à *MN*. Par la même raison la Tangente *bg* commune Section du plan Elliptique & du plan touchant *SBG*, lesquels passent par les deux paralleles *MN*, *BG*, sera parallele à *MN*. Les deux Tangentes *af*, *bg*, seront donc paralleles entr'elles: d'où il suit que la ligne *ab* * est un diametre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne *MN* * est divisée en deux parties égales au point *P*. * *Def.* 13. * *Art.* 281.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* terminée par l'Hyperbole; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre *AB*, il est clair selon la Définition quatorziéme, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne *MN*; & qu'ainsi il la coupera selon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales au point *P*. Or comme il n'y a qu'un seul diametre * qui puisse passer par ce point, il s'ensuit que si une ligne *MN* terminée par une Hyperbole, est coupée en deux également en *P* par un diametre *AB*, elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre. * *Art.* 267. * *Art.* 295.

COROLLAIRE.

297. DE-LA il est évident que si l'on mene deux ordonnées de part & d'autre *MPN*, *OQR*, à un diametre *AB*, on aura toûjours * $MP \times PN$. ou $\overline{PM}^2$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2 :: AP \times PB . AQ \times QB$. C'est à dire &c. * *Art.* 275.

PROPOSITION XXI.

Theorême.

298. SI *par un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on mene une Tangente* MFG *qui rencontre deux autres Tangentes paralleles* AF, BG, *aux points* F, G: *je dis que* MF. MG :: AF. BG. FIG. 154.

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui passent par les Tangentes *AF*, *BG*; ils formeront dans le plan touchant *SMG* deux Tangentes *HF*, *hG*, paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui passe par *BG*, formera dans le plan touchant *SAF*, une Tangente *af* qui rencontrera la Tangente *hG* au point *f*, où la ligne *FS* rencontre ce plan Elliptique. Cela posé, les Tangentes *af*, *BG*, seront paralleles entr'elles; puisqu'elles le sont

* Art. 268. chacune à la Tangente *AF*: & partant * on aura *BG*. *Gh* :: *af*. *fh* (à cause des triangles semblables *Shf*, *SHF*, & *Saf*, *SAF*,) :: *AF*. *FH*. Donc *BG*. *AF* :: *Gh*. *FH* (à cause des triangles semblables *MGh*, *MFH*,) :: *MG*. *MF*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il est visible qu'on peut tirer de cette Proposition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipse art. 287. 288. 289. & 290. c'est pourquoi je ne m'amuserai point à les repeter.

PROPOSITION XXII.

Theorême.

Fig. 155. 299. *Si une ligne droite* FG *terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point* A; *je dis que cette ligne droite y sera coupée en deux parties égales.*

Soient menés par le Sommet *S* du cone, & par les deux Asymptotes *CF*, *CG*, deux plans, lesquels toucheront

* Def. 16. * la surface Conique dans les côtés *SM*, *SN*, où le plan *MSN* parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui passe par la droite *FG*; il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes *MF*, *NG*, & dans le plan *MSN* une ligne droite *MN* parallele à *FG*, & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela posé, il est

* Art. 290. visible que la ligne *FG* * est coupée en deux parties égales au point *A*; puisqu'elle touche dans ce point l'Ellipse, aussi-bien que l'Hyperbole.

COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne *FG* qui paſſant par un point donné *A* au dedans d'un angle *FCG*, & étant terminée par ſes côtés, ſoit coupée en deux également par ce point *A*; il s'enſuit que ſi une ligne droite *FG* terminée par les Aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point *A* qui la diviſe cette droite *FG* deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné *A* ſur une Hyperbole dont les Aſymptotes *CF*, *CG*, ſont données, une Tangente *FAG*; il n'y a qu'à tirer la ligne *AD* parallele à l'une des Aſymptotes *CG*, & terminée par l'autre; & ayant pris la partie *DF* égale à *CD*, tirer la ligne *FAG*: elle ſera la Tangente cherchée. Car à cauſe des triangles ſemblables *FCG*, *FDA*, la ligne *FG* ſera coupée par le milieu en *A*; puiſque* *CF* l'eſt en *D*. * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. SI l'on joint deux points quelconques *M*, *N*, d'une Hyperbole *MAN* par une ligne droite qui rencontre les Aſymptotes aux points *H*, *K*; les deux parties *MH*, *NK*, de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Aſymptotes, ſeront égales entr'elles. Car ayant mené par le point *P* milieu de *MN*, le diametre *CP*; & par le point *A* où ce diametre rencontre l'Hyperbole, la ligne *FG* parallele à *MN*, & terminée par les Aſymptotes: il eſt clair * que cette ligne *FG* ſera Tangente en *A*; & par conſéquent* diviſée en deux parties égales en ce point. D'où il eſt clair, à cauſe des triangles ſemblables *CAF*, *CPH*, & *CAG*, *CPK*, que *PH*=*PK*; & par conſéquent *MH*=*NK*. FIG. 156. *Art. 296. *Art. 299.

COROLLAIRE IV.

FIG. 157. 303. Si d'un point donné A sur une Hyperbole, l'on tire deux droites AF, AG, terminées par ses Asymptotes; & que d'un autre point quelconque M de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites MH, MK, terminée aussi par ses Asymptotes, & paralleles aux deux premieres AF, AG: je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

Car 1°. Lorsque les deux points A, M, tombent sur la même Hyperbole; ayant joint ces deux points A, M, par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en P & Q, les triangles semblables PAF, PMH, & QMK, QAG, donneront ces deux proportions, $AF.\ MH :: AP.\ MP$ * $:: MQ.\ AQ :: MK.\ AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

* Art. 302.

2°. Lorsque les points A, M, tombent sur les deux Hyperboles opposées; ayant mené par le point donné A & par le centre C, le diametre AB, & tiré les droites BD, BE, paralleles à AF, AG, & terminées par les mêmes Asymptotes; il est clair que les triangles CAF, CBD, & CAG, CBE, seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque * $CA = CB$. C'est pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or selon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc aussi $FA \times AG = KM \times MH$.

* Art. 294.

AVERTISSEMENT.

Je laisse les autres proprietés des Asymptotes, & des Diametres conjugués, parcequ'elles se tirent de celles-ci sur le plan, comme l'on a fait dans le troisiéme Livre; mon dessein n'étant ici que de faire voirde quelle utilité peut être la considération du Solide, pour démontrer tout à la fois & sans aucun calcul, les pro-

prietés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Asymptotes; d'où dépendent toutes les autres. C'est ce que je crois avoir executé d'une maniére fort aisée, & entierement nouvelle; puisque je ne me suis point servi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Geometres Modernes aprés M^rs. *Paschal* & *Desargues*; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonstrations seules me paroissent aussi longues que celles de tout ce Livre.



LIVRE SEPTIE'ME.

Des lieux Geometriques.

DE'FINITION I.

FIG. 158. 159. SOIENT deux droites inconnuës & indéterminées AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle APM donné ou pris à volonté ; & dont l'une AP que j'appellerai toûjours x, ait un commencement fixe au point A, & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de poſition ; & l'autre PM que je nommerai y, en change continuellement, & ſoit toûjours parallele à elle-même : c'eſt à dire que toutes les droites PM doivent être paralleles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës, & qui exprime la relation de chaque indéterminée AP (x) à ſa correſpondante PM (y). La ligne droite ou courbe qui paſſe par les extremités de toutes les valeurs de y, c'eſt à dire, par tous les points M, eſt appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158. Suppoſons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toûjours la relation de AP (x) à PM (y) qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM. Ayant pris ſur la ligne AP la partie $AB = a$, & de B mené $BE = b$ parallele à PM & du même côté ; la droite indéfinie AE ſera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP parallele à BE, les triangles ſemblables ABE, APM, donneront toûjours cette proportion, AB (a). BE (b) :: AP (x). PM $(y) = \frac{bx}{a}$. Et partant la droite AE eſt le lieu de tous les points M.

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de *AP* à *PM*, & que l'angle *APM* soit droit ; la circonference d'un cercle qui a pour rayon la droite $AB = a$ prise sur la ligne *AP*, sera appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, la perpendiculaire *MP* (*y*), on aura toûjours par la proprieté du cercle, $\overline{PM}^2 (yy) = DP \times PB (aa - xx)$ en prenant *BD* pour le diametre de ce cercle. D'où l'on voit que sa circonfernce est le lieu de tous les points *M*. FIG. 159.

REMARQUE.

304. SI aprés avoir supposé que les *PM* tendent vers un certain côté de la ligne *AB*, comme vers *Q*, on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté opposé, comme vers *G*; il faut remarquer que leurs valeurs deviennent négatives de positives qu'elles étoient, & qu'ainsi on a pourlors $PM = -y$. De même si aprés avoir supposé que les points *P* tombent d'un certain côté par rapport au point *A*, comme du côté de *B*, on suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme vers *D*; les *AP* deviendront négatives de positives qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$. Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs *vraies*; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Geometrique doit passer par les extremités de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë *y*, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë *x*. Si donc l'on mene la droite *QAG* parallele à *PM*, un lieu Geometrique pourra se trouver dans les quatre angles *BAQ*, *BAG*, *GAD*, *DAQ*, comme dans le second exemple (*fig.* 159.), ou seulement dans quelques-uns de ces angles comme dans le premier (*fig.* 158.). Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'abord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point *M* sur le quart *QB* de la circonference ; si ensuite le point *M* FIG. 158. 159.

eſt pris ſur le quart GB, on aura $AP = x$, & $PM = -y$; s'il eſt pris ſur DG, on aura $AP = -x$, & $PM = -y$; & enfin s'il eſt pris ſur DQ, on aura $AP = -x$, & $PM = y$; & il viendra toûjours dans tous ces cas par la proprieté du cercle, la même équation $yy = aa - xx$; parce que les quarrés de $\pm y$ & de $\pm x$ ſont les mêmes dans tous ces cas, ſçavoir yy & xx. De même dans le premier exemple, ſi en prenant d'abord le point M du côté de E ſur AE, dans l'angle QAP, on fait $AP = x$, & $PM = y$; Ce point M pris enſuite ſur EA prolongée du côté de A dans l'angle GAD, donnera $AP = -x$, & $PM = -y$; & à cauſe des triangles ſemblables ABE, APM, on formera cette proportion $AB\,(a).\ BE\,(b) :: AP\,(-x).\ PM\,(-y) = -\frac{bx}{a}$; & partant $y = \frac{bx}{a}$, qui eſt la même équation que l'on trouve en ſuppoſant que le point M tombe dans l'angle BAQ.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'il s'agira dans la ſuite de conſtruire le lieu d'une équation donnée, on ſuppoſera toûjours que AP (x) & PM (y) ſoient poſitives, c'eſt à dire que tous les points M tombent dans le même angle BAQ. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui ſera renfermée dans cet angle.

DÉFINITION II.

Les anciens Geometres ont appellé *Lieux plans*, ceux qui ſont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui ſont des Paraboles, des Ellipſes, ou des Hyperboles. Mais les Modernes diſtribuënt les lieux Geometriques en differens degrés: ils comprennent ſous le premier tous ceux où les inconnuës x & y n'ont qu'une dimenſion dans leurs équations; ſous le ſecond, tous ceux où elles n'en ont que deux; ſous le troiſiéme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainſi de ſuite. Où l'on doit

doit observer que les inconnuës x & y ne se doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré ; qu'elles ne doivent faire au plus ensemble qu'un produit de deux dimensions xy dans le second, un de trois xxy ou xyy dans le troisiéme, &c.

DE'FINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, sont regardés comme differens entr'eux lorsque l'une ou l'autre des inconnuës x & y, ou toutes les deux jointes ensemble s'y trouvent avec differentes dimensions. Ainsi dans le premier degré si l'on propose l'équation $y - \frac{bx}{a} + c = o$, les termes y, $-\frac{bx}{a}$, c, seront differens ; & de même dans le second, si l'on proposoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + hx - hh + ll = o$, les termes yy, $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + hx$, $-hh + ll$, seroient chacun differens.

AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du second degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour construire des lieux plus composés, dans les cas particuliers qui se peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la suite. Mon dessein est donc de donner dans ce Livre une methode générale pour construire les lieux du premier & du second degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le second ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipse & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles opposées.

DEMANDE.

305. On demande qu'on puiſſe réduire ſous une fraction ſimple & abregée, toute quantité litterale donnée, ſi composée qu'elle puiſſe être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puiſſe prendre une fraction ſimple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fc} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres a, c, f, g, marquent des lignes données. 2°. Qu'on puiſſe trouver une ſeule ligne droite $s = \frac{age-bce}{bb+af}$, où les lignes droites a, b, c, e, f, g, ſont données. 3°. Qu'on puiſſe trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccee-eebb}{bb+af}$, où les lignes a, b, c, e, f, b, s, ſont données; de ſorte qu'on ait ſon côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccee-eebb}{bb+af}}$. On enſeignera au commencement du huitiéme Livre comment cela ſe fait.

PROPOSITION I.

Problême.

306. CONSTRUIRE *tout lieu du premier degré, ſon équation étant donnée.*

Lorſque les inconnuës x & y n'ont qu'une dimenſion dans l'équation propoſée, & que leur produit xy ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation ſera toûjours une ligne droite, & on la réduira à l'une des quatre formules ſuivantes.

1°. $y = \frac{bx}{a}$, 2°. $y = \frac{bx}{a} + c$, 3°. $y = \frac{bx}{a} - c$, 4°. $y = c - \frac{bx}{a}$,

dans leſquelles on ſuppoſe que l'inconnuë y ſoit délivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre inconnuë x ſoit réduite * ſous cette expreſſion $\frac{b}{a}$, &

* Art. 305.

tous les termes connus ſous cette autre c.

Les mêmes choſes étant poſées que dans la définition premiere, on conſtruira les lieux des trois dernie-

res formules de la maniere qui suit; car pour le lieu de la premiere, on l'a déja construit dans cette définition.

Pour construire le lieu de la seconde formule $y = \frac{bx}{a} + c$, on prendra sur la ligne AP la partie $AB = a$; & ayant mené les droites $BF = b$, $AD = c$, paralleles à PM & du même côté, on tirera la ligne AE indéfinie du côté de E, & la droite indéfinie DM parallele à AE. Je dis que cette ligne DM renfermée dans l'angle PAQ fait par la ligne AP & par la droite AQ menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP parallele à AQ & qui rencontre AE en F; les triangles semblables ABE, APF, donneront $AB (a) . BE (b) :: AP (x) . PF = \frac{bx}{a}$. Et partant $PM (y) = PF (\frac{bx}{a}) + FM (c)$. FIG. 160.

Le lieu de la troisiéme formule $y = \frac{bx}{a} - c$ se construit en cette sorte. Ayant pris $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM; sçavoir, BE du même côté que AQ, & AD du côté opposé; on tirera par les points A, E, la droite AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallele à AE, & qui rencontre AP en G. Je dis que la droite indéfinie GM renfermée dans l'angle PAQ, sera le lieu qu'on cherche. Car on aura toûjours $PM (y) = PF (\frac{bx}{a}) - FM (c)$. FIG. 161.

Enfin pour avoir le lieu de la quatriéme formule $y = c - \frac{bx}{a}$. Ayant pris sur AP la partie $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM; sçavoir, BE du côté opposé, & AD du même côté que AQ; on tirera par les points A, E, la ligne AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallele à AE, & qui rencontre en G la ligne AP. Je dis que la droite DG renfermée dans l'angle PAQ, sera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne FIG. 162.

MP parallele à *AQ*, & qui rencontre *AE* en *F*, on aura toûjours $PM(y) = FM(c) - PF\left(\frac{bx}{a}\right)$.

Si l'inconnuë *x* n'est multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes se changeront en celles-ci.

1°. $y = x$, 2°. $y = x + c$, 3°. $y = x - c$, 4°. $y = c - x$, lesquelles se construisent de la même maniere, en observant de prendre la droite *BE* égale à *AB* que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

REMARQUE.

307. Il peut arriver que l'équation soit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnuës *x* ou *y*; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y = c$, & $x = c$.

FIG. 163. Pour construire la premiere formule $y = c$. Les mêmes choses étant toûjours posées que dans la définition premiere; on menera par le point fixe *A*, la droite $AD = c$ parallele à *PM* & du même côté, on tirera ensuite la droite indéfinie *DM* parallele à *AP*: je dis que cette ligne *DM* sera le lieu de l'équation proposée. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M* la droite *MP* parallele à *AD*, il est clair qu'on aura toûjours $PM(y) = AD(c)$.

FIG. 164. Pour construire la seconde formule $x = c$. Ayant pris $AP = c$, on tirera la droite indéfinie *PM* qui fasse avec *AP* l'angle *APM* donné ou pris à volonté: je dis qu'elle sera le lieu de tous les points *M*. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, la droite *MQ* parallele à *AP*, & qui rencontre au point *Q* l'indéfinie *AQ* parallele à *PM*; il est clair qu'on aura toûjours *MQ* ou $AP(x) = c$, de quelque grandeur que l'on puisse prendre $PM(y)$.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos pour éclairer l'esprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la methode dont

je vais me servir pour la construction des lieux du second degré. Elle consiste à construire d'abord une Parabole en sorte que l'équation qui en exprime la nature soit la plus composée qu'il se puisse, de faire ensuite la même chose dans l'Ellipse, & dans l'Hyperbole rapportée à ses diametres & considerée entre les asymptotes; ce qui fournit des équations ou formules générales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant proposée, je puisse connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée; & comparant ensuite tous ses termes avec ceux de la formule, j'en tire la construction du lieu de cette équation, en observant certaines remarques qui servent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propositions qui suivent.

LEMME FONDAMENTAL

Pour la construction des lieux à la Parabole.

308. SOIENT comme dans la premiere définition deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y); & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela posé. FIG. 165. 166.

1°. On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM & du même côté, on tirera par le point A la droite AE que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE; sur laquelle DG ayant pris la partie $DC = s$ du côté de PM, on décrira * du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AP. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle PAD, fait par la ligne AP, & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, est le lieu de l'équation ou formule suivante. FIG. 165. * Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M de cette portion de Parabole, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, $AB(m).AE(e)::AP(x).AF$ ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et $AB(m).BE(n)::AP(x).PF = \frac{nx}{m}$. Et par conséquent GM ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne * $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

* Art. 19.

FIG. 166. 2°. On menera par le point fixe A, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté que PM, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du même côté que PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ aussi du même côté de PM. On décrira ensuite * du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AQ. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle BAP, sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

* Art. 161.

$$xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{nn}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paral-

leles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, AB (m). AE (e) :: AQ ou PM (y). AF ou DG $= \frac{ey}{m}$. Et AB (m). BE (n) :: AQ (y). $QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent GM ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Or la Parabole donne $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

COROLLAIRE.

309. Il est clair 1°. Que dans la premiere de ces équations ou formules, le quarré yy se trouve sans fraction, & que dans la seconde c'est le quarré xx. 2°. Que dans ces deux formules les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes lignes, en sorte que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie le plan xy, multiplie l'un des quarrés xx ou yy; d'où il suit que si le plan xy ne se rencontroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le quarré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puisqu'alors la fraction donnée $\frac{2n}{m}$ seroit nulle.

PROPOSITION II.

Problême.

310. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ne se rencontrant point, il n'y a qu'un des deux quarrés* xx *&* yy; *ou bien le plan* xy *s'y rencontrant, les deux quarrés* xx *&* yy *s'y rencontrent aussi avec les mêmes signes, en sorte que le quarré de la moitié de la*

fraction qui multiplie xy, *soit égal à celle qui multiplie le quarré de l'une des inconnuës. On suppose toûjours qu'il y ait un des quarrés* xx *ou* yy *qui soit delivré de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la premiere formule du Lemme précédent, si le quarré yy s'y rencontre sans fraction; ou avec celui qui lui répond dans la seconde formule, lorsque c'est le quarré xx. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen desquelles on décrira comme l'on a enseigné dans le Lemme (en se servant des deux Remarques suivantes) une Parabole qui sera le lieu cherché.

REMARQUE I.

311. 1°. ON prendra pour AB (m) telle grandeur positive que l'on voudra. 2°. Les lignes AB (m), BE (n) étant données, la ligne AE (e) l'est aussi puisque l'angle ABE est donné. 3°. Lorsque $n = o$, la ligne AE tombe sur AB, c'est à dire, sur AP dans la construction de la premiere formule, & sur AQ dans celle de la seconde: alors on aura $AB(m) = AE(e)$, puisque les points B, E, se confondront alors ensemble. 4°. Lorsque la valeur de l'une des quantités n, r, s, est négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté opposé à celui de PM; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorsqu'elle est positive.

REMARQUE II.

312. S'IL arrive que la valeur du parametre CH (p) soit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté opposé à celui du Lemme: c'est à dire, du côté opposé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée AP dans la construction de la premiere formule, & l'indéterminée

terminée AQ dans celle de la seconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

313. SOIT $yy - 2ay - bx + cc = o$ l'équation donnée, dont il faut construire le lieu.

Comme le quarré yy se trouve ici sans fraction, je choisis la premiere formule * du Lemme, de laquelle comparant chaque terme avec celui qui lui répond dans la proposée, j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le plan xy ne se rencontrant point dans la proposée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero ; d'où je tire $n = o$, & par conséquent * $m = e$: c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, & mettant au lieu de e sa valeur m, je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = o$. 2°. La comparaison des termes correspondans $-2ry$ & $-2ay$ donne $r = a$. 3°. Celle de $-px$ & $-bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnuës x & y ne se trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour r & p leurs valeurs a & b, je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$, qui est une valeur négative lorsque a surpasse c, comme on le suppose ici. Je n'ai point comparé les premiers termes yy & yy entr'eux ; parce qu'étant précisément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de n, r, p, s, étant ainsi déterminées, je construits le lieu en me servant de la construction * de la formule, & observant ce qu'il y a dans la premiere * Remarque en cette sorte.

* Art. 308. n. 1.

* Art. 311.

* Art. 308. n. 11.

* Art. 311.

Puisque $BE(n) = o$, les points B, E, se confondent, & la ligne AE tombe * sur AP ; c'est pourquoi je mene d'abord par le point fixe A la ligne $AD(r) = a$ parallele à PM, & du même côté, parce que sa valeur est positive. Je tire ensuite DG parallele à AP, sur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$ du côté opposé à

* Art. 311. FIG. 167.

PM; parceque $s = \frac{cc-aa}{b}$, qui est une valeur négative.

* Art. 161. Je décris enfin * du diametre CG (qui ait pour parametre la ligne $CH (p) = b$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole; & je dis que ses deux portions OMM, RMS, renfermées dans l'angle PAO fait par AP & par la ligne AO menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques M, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre DG au point G; on aura $GM = y - a$, ou $GM = a - y$, selon que le point M tombera audessus ou audessous du diametre CG; & CG ou

* Art. 19. $DG + CD = x + \frac{aa-cc}{b}$; & partant * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2$ $(yy - 2ay + aa) = CG \times CH$ $(bx + aa - cc)$, c'est à dire $yy - 2ay - bx + cc = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

314. Si l'on prolonge AO de l'autre côté de A vers X, il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie SM de la Parabole, renfermée dans l'angle SAX, sera le lieu de toutes les valeurs fausses & de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée. En effet si l'on prend AP plus grande que AS, & qu'on mene PM parallele à AX, & du même côté, laquelle rencon-

* Art. 304. tre la portion SM en M; l'on aura * $PM = -y$, & partant la droite GM ou $GP + PM = a - y$, & on retrouvera par la proprieté de la Parabole comme cidessus l'équation donnée.

2°. Que la portion RCO de cette Parabole, qui tombe dans l'angle TAO opposé au sommet à l'angle SAX, sera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y

dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x; car faisant * $AP = -x$, on retrouvera encore l'équation donnée. * Art. 304.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle TAX opposé au sommet à l'angle PAO, elle seroit le lieu des valeurs fausses de l'inconnuë y, qui répondroient aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x. De sorte que cette Parabole est le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = 0$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur vraie AP de l'autre inconnuë x, lorsque cette ligne AP est moindre que AS; qu'il y a une valeur vraie PM, & une fausse $-PM$, lorsque AP surpasse AS; qu'il n'y a qu'une valeur vraie SV de y, l'autre étant nulle ou zero, lorsque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur fausse $-AP$ de l'inconnuë x, lorsque AP est moindre que AT; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente TC, lorsque $AP = AT$; & qu'enfin si l'on prenoit AP $(-x)$ plus grande que AT, comme l'appliquée PM ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'ensuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fausse de l'inconnuë y, qui pût répondre à cette valeur fausse $-AP$ de l'autre inconnuë x: c'est à dire que les valeurs de l'inconnuë y deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci se doit entendre de la même maniére dans tous les autres Exemples qui suivent, tant dans la Parabole que dans les autres Séctions Coniques: de sorte que la Séction Conique qu'on trouvera, sera non-seulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue y par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnue x;

mais aussi celui de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue y par rapport aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue x.

EXEMPLE II.

315. SOIT l'équation donnée $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$, dont il faille construire le lieu.

Comme le quarré yy est ici sans fraction, je choisis de même que dans l'Exemple précédent, la premiere
* Art. 308. n. 1. formule * du Lemme; & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée,
* Art. 311. 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant * $m = a$, je tire $n = -b$. 2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-dessus, $n = -b$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = -b$; & partant $p = \frac{ab + 2bc}{e}$, en mettant pour $m, n, r,$ leurs valeurs $a, -b, -c$. 5°. $rr + ps = cc$, ce qui donne $s = o$, en mettant pour rr sa valeur cc. Or ces valeurs de $m, n, r, p, s,$ étant
* Art. 308. n. 1. ainsi déterminées, je construis le lieu de cette équation en me servant de la construction * de la premiere formule en cette sorte.

FIG. 168. Ayant pris sur la ligne AP la partie $AB(m) = a$, je mene les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ paralleles à PM, & du côté opposé, parce que $n = -b$ & $r = -c$ qui sont des valeurs négatives. Je tire ensuite par les points déterminés A, E, la ligne AE (e) qui est donnée, & par le point D la ligne DG parallele à AE. Cela fait comme DC (s) est nulle ou zero, le point
* Art. 161. C tombe sur D; c'est pourquoi je décris * du diametre DG (qui ait pour parametre $DH(p) = \frac{ab + 2bc}{e}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole; & je dis que sa portion OM renfermée dans l'angle PAH, où l'on suppose que doivent tomber tous les points M, sera le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pis à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donnneront ces deux proportions, $AB(a)$. $AE(e)::AP(x)$. AF ou $DG=\frac{ex}{a}$. Et $AB(a)$. $BE(b)::AP(x)$. $PF=\frac{bx}{a}$. Et par conséquent GM ou $PM+PF+FG=y+\frac{bx}{a}+c$. Or par la proprieté * de la Parabole, $\overline{GM}^2=GD\times DH$, c'est à dire, * *Art.* 19.
en mettant les valeurs analytiques, $yy+\frac{2b}{a}xy+\frac{bb}{aa}xx+2cy-bx+cc=o$. Donc &c.

REMARQUE I.

316. Si la ligne AP ne coupoit point la Parabole, mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entiere au dehors, il s'ensuivroit qu'aucun des points cherchés M ne pourroit tomber dans l'angle PAH, comme l'on avoit supposé en faisant la construction; & qu'ainsi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnuë y qui répondit à une valeur vraie de l'autre inconnuë x, de quelque grandeur qu'elle pût être. FIG. 168.

Cette Remarque est générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non seulement dans la Parabole, mais aussi dans les autres Sections.

REMARQUE II.

317. Il est à propos de remarquer que si l'on avoit pris pour $AB(m)$ une autre grandeur que a, telle qu'elle pût être, les valeurs de $BE(n)$ & de $AE(e)$ changeroient à la verité: mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toûjours les mêmes; parce que dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, comme aussi la raison

du côté AB au côté BE, ſçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m}=\frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raiſons de $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, qui ſe puiſſent trouver dans les valeurs de p, r, s; il s'enſuit que ces valeurs demeurent toûjours les mêmes, telle grandeur poſitive que l'on puiſſe prendre pour la ligne AB (m): de ſorte qu'on n'a pris $m=a$ que pour rendre la conſtruction plus ſimple. Ce que l'on doit toûjours obſerver dans la ſuite.

EXEMPLE III.

318. ON demande le lieu de l'équation donnée $xx+\frac{2b}{a}yx+\frac{bb}{aa}yy-2cx+by-\frac{2bc}{a}y=0$.

Comme c'eſt ici le quarré xx qui eſt délivré de fractions, je choiſis la ſeconde formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaiſon des termes correſpondans,

*Art. 308. n. 2.

1°. $\frac{2n}{m}=-\frac{2b}{a}$; d'où en faiſant $m=a$, je tire $n=-b$. 2°. $\frac{nn}{mm}=\frac{bb}{aa}$; & partant, puiſque $m=a$, on trouve comme ci-deſſus $n=-b$. 3°. $r=c$. 4°. $\frac{2nr-ep}{m}=b-\frac{2bc}{a}$; ce qui donne $p=-\frac{ab}{c}$, en mettant à la place de m, n, r, leurs valeurs $a, -b, c$. 5°. $rr+ps=0$; parce que dans l'équation donnée il ne ſe trouve point de termes entierement connus, que l'on puiſſe comparer au terme $rr+ps$ de la formule ; ce qui donne $s=-\frac{rr}{p}=\frac{ccc}{ab}$, en mettant pour r & p leurs valeurs c & $-\frac{ab}{c}$. Or ces valeurs étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu requis en me ſervant de la conſtruction de la ſeconde formule * du Lemme, & obſervant exactement les articles 311. & 312. de la maniere qui ſuit.

* Art. 308. n. 2.

FIG. 169. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM, je prends ſur cette ligne la partie AB $(m)=a$; & du point B je tire $BE=b=-n$ parallele à AP, & du côté oppoſé à PM, parce que la

valeur de n est négative ; & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e) qui est donnée. Ayant pris sur AP la partie AD (r) $= c$ du côté de PM, je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie DC (s) $= \frac{ecc}{ab}$ du côté de PM. Je décris ensuite * du diametre CG (qui ait pour ordonnées * Art. 161.
des droites paralleles à AP, & pour parametre la ligne $CH = \frac{ab}{e} = -p$) une Parabole qui s'étende * du * Art. 312.
côté opposé à celui où s'étend AQ, parce que $p = -\frac{ab}{e}$ qui est une valeur négative. Je dis que la portion OMR de cette Parabole, renfermée dans l'angle PAB, sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G ; les triangles semblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB(a) . AE(e) :: AQ$ ou $PM(y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{a}$. Et $AB(a) . BE(b) :: AQ(y) . QF = \frac{by}{a}$. Et par conséquent GM ($QM + FQ - FG$) $= x + \frac{by}{a} - c$, ou GM ($FG - FQ - QM$) $= c - \frac{by}{a} - x$, selon que le point M tombe de part ou d'autre du diametre CD ; & la coupée CG ou $CD - DG = \frac{ecc}{ab} - \frac{ey}{a}$. Or * par la proprieté * Art. 19.
de la Parabole, $\overline{GM}^2 = CG \times CH$: c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

319. S'il arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p = 0$; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se

peut toûjours alors abaisser en sorte que son lieu devient
*Art. 308. une ligne droite ; ce qui se voit par les formules * du Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la premiere les termes où p se rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o$, de laquelle extrayant la racine quarrée, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = o$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$, dont le lieu est une ligne droite que l'on construira selon l'article 306. La même chose arrivera de la seconde formule de l'art. 308.

EXEMPLE IV.

320. SOIT proposée l'équation $xx - ay = o$, de laquelle il faut trouver le lieu.

*Art. 308. n. 2. Comme c'est ici le quarré xx qui se trouve délivré de fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaison des termes qui se répondent,
*Art. 311. 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que xy ne se trouve point dans la proposée ; d'où je tire $n = o$, & par conséquent * $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} = o$, parce que le quarré yy ne s'y trouve pas non plus ; d'où je tire encore $n = o$. 3°. $r = o$, parce que l'inconnuë x ne se trouve point au premier degré dans la proposée : c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e sa valeur m ; il vient $xx - py + ps = o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée. 4°. La comparaison des termes $-py$ & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puisque dans la proposée il ne se trouve aucun terme entierement connu que l'on puisse comparer au terme ps ; il s'ensuit que $ps = o$, & qu'ainsi $s = o$. Or ces valeurs de n, r, p, s, ainsi déterminées me servent à construire le lieu qu'on demande, ayant égard à la construction de la seconde for-
*Art. 311. mule de l'art. 308. & à l'article 311. en cette sorte.
FIG. 170. Puisque $BE\,(n) = o$, la ligne AE tombe * sur AQ menée parallelement à PM & du même côté ; comme aussi

aussi DG, parce que AD $(r)=o$. Or puisque $CD(s)=o$, le point C tombe sur le point D lequel tombe en A comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Parabole du diametre AQ, qui ait pour parametre AH $(p)=a$, & pour ordonnées des droites MQ paralleles à AP: je dis que sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAQ, est le lieu cherché. * Art. 161.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles à AQ & à AP, on aura par la proprieté * de la Parabole, $\overline{QM}^2$ (xx) $=AQ\times AH$ (ay); & partant $xx-ay=o$, qui étoit l'équation proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 19.

DE'MONSTRATION DU PROBLEME.

321. Si l'on met dans la formule générale * à la place de m,n,r,s,p, les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaison de ses termes avec ceux de l'équation proposée, telle qu'elle puisse être, pourvû qu'elle ait les conditions marquées dans le Problême; il est clair que cette formule générale se changera en la proposée: & partant que si l'on prend aussi ces valeurs dans la construction * du Lemme, le lieu de la formule générale se changera en celui de l'équation proposée. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Problême accompagné de ses deux Remarques, comme les Exemples précédens le font assés voir. Donc &c. * Art. 308. * Art. 308.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Ellipse ou au Cercle.

322. Soient encore comme dans la définition premiere deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$; & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s, t. Cela posé, Fig. 171.

On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e; & par le point D, la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à t. On décrira ensuite une Ellipse* du diametre LK $(2t)$, qui ait pour parametre $KH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

* Art. 161.

$$\begin{array}{llllll} yy - \frac{2n}{m}xy & + \frac{nn}{mm}xx & - 2ry & + \frac{2nr}{m}x & + rr & = 0. \\ & + \frac{eep}{2mmt} & & - \frac{2eps}{2mt} & - \frac{ptt}{2t} & \\ & & & & + \frac{pss}{2t} & \end{array}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M, de cette portion d'Ellipse, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront AF ou $DG = \frac{ex}{m}$, & $PF = \frac{nx}{m}$. On aura donc $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, & $CG = \frac{ex}{m} - s$. Or par la proprieté de l'Ellipse* $KL\ (2t) . KH\ (p) :: LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2\ \left(tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm}\right) . \overline{GM}^2\ \left(yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr\right) = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2epsx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$. Donc &c.

* Art. 55. & 41.

S'il arrive que le diametre KL $(2t)$ & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux, on aura toûjours $\overline{GM}^2 = LG \times GK$; d'où il est évident selon les Elemens de Geometrie, que si l'angle CGM est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diametre la ligne KL.

COROLLAIRE.

323. Il eſt clair que les deux quarrés yy & xx ſe trouvent toûjours avec les mêmes ſignes dans cette formule ; & que lorſque le plan xy s'y rencontre, le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION III.

Problême.

324. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée ; dans laquelle les deux quarrés* yy *&* xx *ſe rencontrent avec les mêmes ſignes ſans le plan* xy, *ou avec ce plan, enſorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit moindre que la fraction qui multiplie le quarré* xx. *On ſuppoſe toûjours ici que le quarré* yy *ſoit délivré de fractions.*

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du Lemme précédent ; & on tirera de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, t, par le moyen deſquelles valeurs on décrira comme l'on a enſeigné dans ce Lemme (en obſervant exactement l'art. 311.) une Ellipſe qui ſera le lieu cherché.

* *Art.* 322.

EXEMPLE I.

325. SOIT propoſé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc = 0$, dans laquelle le quarré de $\frac{1}{2}$ moitié de la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie xy, eſt moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie xx.

La comparaiſon de chaque terme de la formule générale

* *Art.* 322. du Lemme* avec celui qui lui répond dans cette équation, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan xy, on le doit considerer comme étant multiplié par l'unité numerique 1 : & partant si l'on fait $m=a$, l'on aura $n=-\frac{1}{2}a$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{mm-2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour m, n, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}a$: & par conséquent $p=\frac{aat}{2ee}$. 3° $r=a$. 4° $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = b$; d'où en mettant pour $m, n, r, \frac{p}{t}$, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}a$, a, $\frac{aa}{2ee}$, il vient $s=\frac{-2ae-2eb}{a}$. 5°. $rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t} = cc$: & partant $tt = ss + \frac{2trr}{p} - \frac{2tcc}{p} = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{t}$, r, les valeurs $\frac{aa}{2ee}$, a, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse cherchée en me servant de la construction du
*Art. 322. Lemme * & de l'article 311. en cette sorte.

Fig. 172. Je prens sur la ligne AP la partie AB (m) a; & ayant mené parallelement à PM & du même côté la ligne AD (r) $=a$, & du côté opposé la droite $BE=\frac{1}{2}a = -n$, parce $n=-\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point A la droite AE (e) qui est donnée ; & par le point D, la droite DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie $DC=\frac{2ae+2be}{a}=-s$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à
* *Art.* 161. $t=\sqrt{ss+4ee-\frac{4ccee}{aa}}$. Je décris ensuite* une Ellipse du diametre LK, qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH (p) $=\frac{aat}{2ee}$. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD, est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M,

la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF donneront $AB(a) . AE(e) :: AP(x) . AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB(a) . BE(\frac{1}{2}a) :: AP(x) . PF = \frac{1}{2}x$. On aura donc $GM = y + \frac{1}{2}x - a$; & CG ou $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, puisque $DC = -s$. Or par la proprieté * de l'Ellipse $KL(2t) . KH(\frac{aat}{2ee}) :: LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$ $(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}) . \overline{GM}^2 (yy + xy - 2ay + \frac{1}{4}xx - ax + aa)$. D'où en mettant à la place de $tt - ss$ & de s, leurs valeurs $4ee - \frac{4eeee}{aa}$ & $- \frac{2ae - 2be}{a}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'équation même proposée. Donc &c. * Art. 55. & 42.

REMARQUE.

326. S'il arrive que $ss + 4ee$ soit égale ou moindre que $\frac{4eeee}{aa}$, il est évident que la valeur de t deviendra nulle ou imaginaire; & ainsi il sera pour lors impossible de construire l'Ellipse qui devroit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit necessairement des contradictions, il s'ensuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'est à dire que toutes les valeurs de l'inconnuë y qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, seroient toutes imaginaires.

Ceci se voit clairement dans la formule générale * du Lemme qui, en transposant quelques termes, devient $yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2pesx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$, dans laquelle équation le premier membre est le quarré de $y - \frac{n}{m}x - r$; & le second, le quarré de z * Art. 322.

moins le quarré de $s - \frac{ex}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{2t}$. Or il est visible que si la valeur du quarré tt est nulle ou négative, la valeur de ce second membre sera négative; & qu'ainsi l'on aura dans ces deux cas un quarré, sçavoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui est une contradiction manifeste.

EXEMPLE II.

327. ON demande le lieu de l'équation $yy + \frac{b}{a}xy + xx + cy + fx - ag = 0$, dans laquelle on suppose suivant l'art. 323. que $\frac{bb}{4aa}$ est moindre que la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie le quarré xx; c'est à dire que b est moindre que $2a$.

*Art. 322. La comparaison des termes de la formule * générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation proposée, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, on tire $n = -\frac{1}{2}b$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; d'où en mettant pour m, n, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{4aa - bb}{2ee}$: & partant $p = \frac{4aat - bbt}{2ee}$. 3°. $r = -\frac{1}{2}c$. 4°. $s = \frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$. 5°. $t = \sqrt{ss + \frac{ccpe + 4agee}{4aa - bb}}$. Ce qui fournit cette construction.

FIG. 173. Ayant pris sur la ligne droite indéfinie AP la partie $AB(m) = a$, & mené parallelement à PM & du côté opposé les droites $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$; on tirera par le point A la droite $AE(e)$ qui est donnée, & par le point D la droite DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC(s) = \frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$ du côté de PM, si bc surpasse $2af$, comme on le suppose ici; & du côté opposé, s'il est moindre; ensuite on prendra de part & d'autre du point C, les parties CK & CL égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}}$. Cela fait, on décrira * une

*Art. 161.

Ellipse du diametre LK ($2t$) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre une ligne KH (p) $= \frac{4aat - bbt}{2ae}$. Je dis que sa portion OR sera le lieu de l'équation proposée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, LK, aux points F, G; on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$; ce qui donnera MG ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{ex}{a} - s$, ou $s - \frac{ex}{a}$. Or par la proprieté * de l'Ellipse LK ($2t$). KH $\left(\frac{4aat - bbt}{2ae}\right)$ :: $LG \times GK$ $\left(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}\right)$. $\overline{GM}^2$ $\left(yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{bc}{2a}x + \frac{1}{4}cc\right)$. *Art. 55. & 41.

Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour s leurs valeurs $\frac{cce + 4age}{4aa - bb}$ & $\frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$) donne l'équation même proposée.

Il est à propos de remarquer que si l'angle AEB étoit droit, l'angle CGM le seroit aussi; & le diametre LK ($2t$) seroit égal au parametre KH $\left(\frac{4aat - bbt}{2ae}\right)$, puisque $ee = aa - \frac{1}{4}bb$ à cause du triangle réctangle AEB. D'où l'on voit que l'Ellipse deviendroit alors un cercle qui auroit pour rayon la droite CK ou CL (t) $= \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que DC (s) $= \frac{bc - 2af}{4e}$; ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

EXEMPLE III.

328. SOIT proposé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = 0$.

Je compare les termes de la formule* générale, avec ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai *Art. 322.

1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que le terme xy manquant, on le doit

considerer comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n=o$: & partant $m=e$. 2°. $\frac{nn}{mm}+\frac{ep}{2mmt}=1$; c'est à dire, $\frac{p}{2t}=1$ en mettant pour n & m leurs valeurs o & e: & partant $p=2t$. 3°. $r=o$; parce que l'inconnuë y ne se trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considerer comme étant multipliée par zero: c'est pourquoi effaçant dans la formule

* Art. 322. génerale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e & $\frac{p}{2t}$ leurs valeurs m & 1, elle se changera en celle-ci $yy+xx-2sx-tt+ss=o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°. $2s=a$; & partant $s=\frac{1}{2}a$. 5°. $ss-tt=o$; puisqu'il n'y a point de termes entierement connus dans l'équation donnée: & partant $tt=ss=\frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t=\frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu en cette sorte.

Fig. 174. Puisque $BE(n)=o$, il s'ensuit que AE tombe sur AP, laquelle tombe aussi sur DG, puisqu'on a encore $AD(r)=o$; de sorte que le point D tombe en A. C'est pourquoi prenant sur AP, la partie $AC(s)=\frac{1}{2}a$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à $t=\frac{1}{2}a$ (le point L

* Art. 161. tombe ici sur le point A); on décrira * du diametre AK qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne $KH(p)=2t=a$, une Ellipse qui sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à

* Art. 55. & 41. volonté APM, on aura * $AK(a)$ $KH(a)$ :: $AP\times PK$ $(ax-xx)$. $\overline{PM}^2$ (yy). Ce qui donne $yy+xx-ax=o$.

Il est évident que si l'angle APM est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK=a$.

REMARQ.

REMARQUE.

329. Il peut arriver deux differens cas, où le lieu de l'équation donnée est un cercle.

Premier cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy se trouve aussi; & que de plus l'angle AEB est droit (ce qui arrive lorsqu'ayant mené AF perpendiculaire sur PM la raison de PF à AP, qui est la même que celle de BE à AB est exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan xy): le lieu de cette équation sera toujours un cercle comme l'on a déja vû dans l'article 324, & la raison en est évidente par la formule générale. Car l'on aura par la comparaison des termes correspondans où se trouve le quarré xx, cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mme} = 1$; d'où l'on tire $\frac{p}{2e} = \frac{mm - nn}{ee} = 1$, puisque à cause du triangle réctangle AEB le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle AEB étant droit, l'angle CGM que fait le diametre LK avec ses ordonnées sera aussi droit; & par conséquent puisque le diametre LK est égal à son parametre KH, il s'ensuit que l'Ellipse devient alors un cercle.

Second cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre pas, & que de plus l'angle APM est droit: son lieu sera toujours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328; & cela se prouve par le moyen de la formule générale. Car puisque le plan xy ne se trouve point dans l'équation donnée, la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero; & partant $BE\,(n) = o$, & $m = e$. d'où l'on voit. 1°. Que le diametre LK est parallele à la ligne AP, & qu'ainsi l'angle CGM qu'il fait avec ses ordonnées étant égal à l'angle APM sera

droit. 2°. Que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $\frac{p}{2t}$, & qu'ainsi on aura $\frac{p}{2t} = 1$: c'est à dire que le diametre LK sera égal à son parametre KH. L'Ellipse qui est le lieu de l'équation donnée sera donc alors un cercle. Or comme alors la formule générale se change en celle-ci

$$\begin{array}{l} yy + xx - 2ry - 2sx + rr = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - tt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + ss \end{array}$$

on pourra, si l'on veut abreger le calcul, en se servant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, les valeurs de r, s, t, qui servent à décrire le cercle qui en est le lieu.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses diametres.

* Art. 161. 330. LES mêmes choses étant posées que dans le

FIG. 175. Lemme précédent pour l'Ellipse, on décrira * du dia-

176. metre LK ($2t$) qui ait pour parametre KH (p), & pour ordonnées des droites paralleles à PM, une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées. Je dis que sa portion OM, ou leurs portions renfermées dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule.

$$\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0. \\ \qquad\qquad\quad - \frac{eep}{2mmt} \qquad\qquad + \frac{2eps}{2mt}x \pm \frac{ptt}{2t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{pss}{2t} \end{array}$$

dans laquelle on doit observer qu'il y a $+ \frac{ptt}{2t}$ lorsque

le diametre ZK est un premier diametre, & $-\frac{ptt}{2t}$ lorsque c'est un second.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP, qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura par la proprieté de l'Hyperbole * KL $(2t)$. KH (p) :: $\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2 \left(\frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m} + ss \pm tt\right)$. $\overline{GM}^2 = \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Donc &c. * Art. 81. & 118.

S'il arrive que le diametre KL $(2t)$ & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux; l'Hyperbole sera équilatere.

COROLLAIRE.

331. IL est clair, 1°. Que les deux quarrés yy & xx se trouvent toûjours avec differens signes dans cette formule, lorsque le plan xy ne s'y rencontre point; ou bien lorsqu'il s'y trouve, & que $\frac{eep}{2mmt}$ surpasse $\frac{nn}{mm}$. 2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes signes, mais avec ces conditions que le plan xy s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION IV.

Problême.

332. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés* yy *&* xx *se rencontrent avec differens signes, ou bien avec les mêmes signes, mais avec ces deux conditions que le plan* xy *s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie soit plus grand*

que la fraction qui multiplie le quarré xx. *On suppose encore ici que le quarré* yy *soit délivré de fractions.*

On construit l'Hyperbole qui en est le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipse dans le Problême précédent. Les Exemples qui suivent le feront voir.

EXEMPLE I.

333. SOIT $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - bb = o$, l'équation dont il faut construire le lieu, & dans laquelle on suppose que le quarré $\frac{bb}{aa}$ surpasse $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant si l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{eep}{2mme} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2e} = \frac{bb - af}{ee}$, & $p = \frac{2bbe - 2afe}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2me} = -2g$, d'où en mettant pour m, n, r, $\frac{p}{2e}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce - age}{bb - af}$. 5°. $\mp tt = ss - \frac{2rre - 2bbe}{p} = ss - \frac{eecc - eebb}{bb - af}$, sçavoir $+tt$ lorsque le quarré ss surpasse $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$, & $-tt$ lorsqu'il est moindre, parce que le quarré tt doit être positif; ce qui fait deux differens cas. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi déterminées, je construis le lieu en me réglant sur la construction du Lemme, de la maniére qui suit.

FIG. 177. 178. Ayant pris sur AP, la partie $AB = a$, & mené parallelement à PM & du côté opposé les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points A, E, la droite AE (e) qui est donnée, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{eag + ebc}{bb - af} = -s$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point C les parties

CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{eecc - eebb}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{eecc + eebb}{bb - af} - ss}$, ſelon que ss eſt plus grand ou moindre que $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$. Cela fait, du diametre LK (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH $(p) = \frac{2bbt - 2aft}{ee}$) je décris une Hyperbole, en obſervant que LK (*fig.* 177.) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un ſecond (*fig.* 178.) dans le dernier. Je dis que ſa portion OM ſera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M une parallele MP à AD, laquelle rencontre les lignes AB, AE, DG, aux points P, F, G; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conſéquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puiſque $CD = -s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, LK $(2t)$. KH $\left(\frac{2bbt - 2aft}{ee}\right) :: \overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2$ $\left(\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt\right)$. $\overline{GM}^2$ $\left(yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc\right)$; ce qui, en mettant pour $ss \pm tt$ & s leurs valeurs $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$ & $\frac{-bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2t$, donne l'équation propoſée. Donc &c.

REMARQUE.

334. S'IL arrive que $ss = \frac{eecc + eebb}{bb - af}$; il eſt clair que la valeur de tt devient nulle ou zero, & qu'ainſi la conſtruction de l'Hyperbole devient impoſſible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation propoſée s'abaiſſe toûjours, en ſorte que ſon lieu, qui devroit être une ou deux Hyperboles oppoſées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans nôtre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion $ee. bb - afs$:

$:: \frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt . yy + \frac{2b}{a} xy + \frac{bb}{aa} xx + 2cy + \frac{2bc}{a} x + cc$; d'où, en effaçant tt qui eſt nul, multipliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, l'on tire $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \frac{ex}{a} - s\sqrt{bb - af}$, c'eſt à dire en mettant pour $-s$ ſa valeur $\frac{bce + age}{bb - af}$, & diviſant de part & d'autre par e, cette équation $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{bb-af}}{a} + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb-af}}$ ou $y = \frac{-b + \sqrt{bb-af}}{a} x + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, qui en faiſant $\frac{n}{m} = \frac{b - \sqrt{bb-af}}{a}$, & $p = \frac{ag + bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, ſe change en cette autre $y = p - \frac{n}{m} x$ dont le lieu eſt une ligne droite que l'on conſtruit ſelon l'article 306.

La raiſon de ceci eſt évidente par la formule générale du Lemme; car effaçant dans cette formule le terme $\mp \frac{ptt}{2t}$ qui renferme le quarré tt que l'on ſuppoſe égal à zero ou nul, elle ſe change en tranſpoſant certains termes, & extrayant les racines quarrées, en cette autre $y - \frac{n}{m} x - r = \frac{ex}{m} - s . \sqrt{\frac{p}{2t}}$ ou $s - \frac{ex}{m} \sqrt{\frac{p}{2t}}$ où les inconnuës x & y ne ſont plus qu'au premier degré, & dont le lieu par conſéquent devient des lignes droites.

EXEMPLE II.

335. ON demande le lieu de l'équation donnée $yy - xx + 2ay + ax = 0$.

La comparaiſon des termes correſpondans donne 1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que le terme xy ne ſe trouve point dans la propoſée; d'où l'on tire $n = 0$, & par conſéquent $m = c$. 2°. $\frac{p}{2t} = 1$, & partant $p = 2t$. 3°. $r = -a$.

4°. $\frac{2ps}{2t} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $rr \mp \frac{prs}{2t} - \frac{pss}{2t} = o$, & ainsi $\mp tt = ss - \frac{2rrt}{p} = -\frac{3}{4}aa$ en mettant pour $r, \frac{2t}{p}, s$ leurs valeurs $-a, 1, \frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-tt$ & non pas $+tt$, afin que la valeur de tt soit positive. Je construis ensuite le lieu en cette sorte.

Puisque $AD\ (r) = -a$, je mene par le point A parallelement à PM & du côté opposé la ligne $AD = a$; & puisque $BE\ (n) = o$, je tire par le point D la droite DG parallele à AP, sur laquelle je prends la partie $DC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point C les parties CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{\frac{3}{4}aa}$. Ensuite du second diametre LK (parce qu'on a pris $-tt$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la droite $KH\ (p) = 2t = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que sa portion OM sera le lieu qu'on cherche. FIG. 179.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à AD, qui rencontre les droites AP, DG, aux points P, G; on aura $MG = y + a$, CG ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la proprieté de l'Hyperbole $LK\ (2t) . KH\ (2t) :: \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2\ (xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt) . \overline{GM}^2\ (yy + 2ay + aa)$; ce qui donne, en mettant pour tt sa valeur $\frac{3}{4}aa$, l'équation même proposée $yy + 2ay - xx + ax = o$.

Il est évident que l'Hyperbole est équilatere.

REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés yy & xx se trouvent avec differens signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre point; son lieu sera toûjours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero; & partant

$BE(n) = 0$, & $m = e$. D'où il ſuit que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{etp}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $-\frac{p}{2e}$; & qu'ainſi on aura $-\frac{p}{2e} = 1$, c'eſt à dire que le diametre LK ſera égal à ſon parametre KH, ou, ce qui eſt la même choſe, que l'Hyperbole ſera équilatere. Or comme la formule générale ſe change alors en celle-ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = 0,$$
$$\mp tt$$
$$- ss$$

il s'enſuit qu'on peut s'en ſervir d'abord pour trouver les valeurs de r, s, t, qui ſervent à conſtruire l'Hyperbole équilatere qui eſt le lieu de l'équation donnée; ce qui abrege le calcul.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

337. SOIENT comme dans la définition premiere, deux lignes inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) qui faſſent entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM; & ſoient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela poſé.

FIG. 180. 1°. On prendra ſur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$ paralleles à PM, & du même côté; on tirera par le point A la droite AE qui eſt donnée, & que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE, ſur laquelle ayant pris les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend AP, on menera parallelement à PM & du même côté la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = p$.

* Art. 130. 131. On décrira enſuite * entre les Aſymptotes CL, CK, une

une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de cette équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$- rx - mp$$

Car $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la proprieté de l'Hyperbole * $CG \times GM$ $\left(\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m} - \frac{erx}{m} + rs\right) = CK \times KH\ (ep)$; ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y$ &c. que cy-dessus. * Art. 101.

2°. On menera par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du côté de PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend PM, & on menera parallelement à AP & du même côté, la droite indéfinie CL & la ligne $KH = p$. On décrira ensuite * entre les asymptotes CL, CK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule. FIG. 181. * Art. 130. 131.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{me}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$- ry - mp$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, AQF, donneront $AB\ (m) . AE\ (e) :: AQ$ ou $PM\ (y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB\ (m) . BE\ (n) :: AQ\ (y) . QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM = x$

$-\frac{ny}{m}-r$, $CG=\frac{n}{m}-s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme xy de fractions, la même seconde formule que ci-dessus. Donc &c.

COROLLAIRE.

338. Il est clair 1°. Que le terme xy se rencontre toûjours dans ces deux formules, puisque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la supposer nulle pour le faire évanoüir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés xx ou yy, lequel s'évanoüit si la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie est nulle.

PROPOSITION V.

Problême.

339. TROUVER *le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan* xy *se rencontre, sans aucun des quarrés* xx *&* yy, *ou seulement avec l'un des deux.*

On délivrera le plan xy de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui luy répondent dans la premiere formule lorsque le quarré xx s'y rencontre, & avec ceux de la seconde lorsque c'est le quarré yy, & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorsque pas un des quarrés xx & yy ne s'y trouve. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen desquelles on décrira une Hyperbole entre ses asymptotes comme l'on a enseigné dans le Lemme précédent, en observant toûjours de mener ou de prendre du côté opposé à AP & à PM les lignes dont les valeurs sont négatives. Les exemples qui suivent éclairciront ces régles.

EXEMPLE I.

340. ON demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = o$.

Comme c'eſt le quarré xx qui ſe rencontre dans l'équation donnée, je choiſis la premiere formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{ms}{e} = c$, & partant $s = \frac{ec}{a}$. 3°. $\frac{ns}{e} - r = o$, parce que l'inconnuë x ne ſe trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{mrs}{e} - mp = o$, parce qu'il ne ſe trouve point de termes entierement connus; & partant $p = \frac{rs}{e} = \frac{bcc}{aa}$. Or comme les valeurs de AP (m), BE (n), CD (s), AD (r), KH (p) ſont toutes poſitives, je conſtruis le lieu préciſément comme dans le Lemme (*fig.* 180.) en obſervant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ou $DG - DC = \frac{ex - ec}{a}$, FIG. 180. & par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$ c'eſt à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

EXEMPLE II.

341. SOIT $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu.

Comme c'eſt le quarré yy qui ſe trouve dans l'équation donnée, je choiſis la ſeconde formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, & ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{ms}{e} = o$, & partant $s = o$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, &

partant $p = \frac{ff}{a}$. Ce qui donne la construction suivante.

FIG. 182. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté, & ayant pris sur cette ligne, la partie $AB\ (m) = a$, je tire $BE = b = -n$ parallele à AP & du côté opposé, & par les points déterminés A, E, la ligne $AE\ (e)$. Je prends sur AP, la partie $AD\ (r) = c$ du côté de PM, & je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, & comme les points D, C, tombent l'un sur l'autre, parce que $DC\ (s) = o$, je prends sur cette ligne la partie $DK = e$ du côté que s'étend PM, & ayant mené parallelement à AB & du même côté la ligne $KH\ (p) = \frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie DL qui tombe ici sur AP, je décris entre les Asymptotes DL, DK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MQ parallele à AP & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura GM ou $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$, DG ou $AF = \frac{ey}{a}$, & partant $DG \times GM = \frac{exy}{a} + \frac{ebyy}{aa} - \frac{ecy}{a} = DK \times KH\ (\frac{eff}{a})$. Ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, l'équation proposée $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$.

REMARQUE.

342. Si l'on prend pour l'arbitraire $AB\ (m)$ une autre valeur que a, celles de $CK\ (e)$ & de $KH\ (p)$ changeront, mais les valeurs du réctangle $CK \times KH\ (ep)$, & des droites $AD\ (r)$, $CD\ (s)$ demeureront toûjours les mêmes ; car elles ne renferment dans leurs expressions que les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, qui ne chan-

gent point, puisque dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, & la raison $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple est $\frac{b}{a}$) du côté $AB(m)$ au côté $BE(n)$. Or comme l'Hyperbole qui doit passer par le point H, sera toûjours la même *, telle grandeur que l'on puisse donner à CK (*e*) & à $KH(p)$, pourvû que le réctangle $CK \times KH$ demeure le même; il s'ensuit que l'on construira toûjours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puisse prendre pour l'arbitraire $AB(m)$. * Art. 102.

EXEMPLE III.

543. IL faut construire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = o$.

Comme pas un des quarrés xx & yy ne se trouve dans l'équation proposée, je puis prendre indifferemment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la proposée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = o$, & partant $n = o$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{ms}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puisque $\frac{nr}{e} = o$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de m, n, r, s, p, étant ainsi déterminées, je construis le lieu de la maniere qui suit. FIG. 185.

Puisque $AD(r) = -b$, je mene parallelement à PM & du côté opposé la ligne $AD = b$; & puisque $BE(n) = o$, je tire la droite indéfinie DG parallele à AP sur laquelle ayant pris les parties $DC(s) = a$, $CK(e) = m = a$ du côté que s'étend AP, je tire la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallele à PM & du côté opposé. Je décris ensuite l'Hyperbole opposée à celle qui ayant pour Asymptotes les droites CL, CK, passe par le point H. Je dis

que ſa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAS, fait par la droite indéfinie AP & par la ligne AS menée parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu cherché.

Car GM ou $PG + PM = y + b$ & CG ou $CD - DG = a - x$, & par conſéquent $CG \times GM = ay - xy + ab - bx = CK \times KH \ (ab + cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le réctangle ab, & tranſpoſant à l'ordinaire, donne $xy - ay + bx + cc = o$ qui eſt l'équation propoſée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui paſſe par le point H; car aucun de ſes points ne pourroit tomber dans l'angle PAS, où l'on ſuppoſe que doivent tomber les points M.

REMARQUE.

344. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p = o$; on voit qu'il ſeroit alors impoſſible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puiſque ſa puiſſance qui eſt égale au réctangle pe ſeroit nulle. Mais alors l'équation ſe pourroit toûjours abaiſſer, en ſorte que ſon lieu deviendroit une ligne droite; car effaçant par exemple dans la premiere formule du Lemme le terme mp, elle devient $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x - rx + \frac{mrs}{e} = o$, qui étant diviſée par
* Art, 306. $\frac{ex}{m} - s$ donne $y - \frac{nx}{m} - r = o$, dont le lieu *eſt une ligne droite.

PROPOSITION V.

Problême.

345. CONSTRUIRE *tout lieu du ſecond degré, ſon équation étant donnée.*

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté, en sorte que l'un des membres soit zero, je distingue deux differens cas.

Premier cas. Lorsque le plan xy ne se trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés yy ou xx, le lieu sera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes signes, le lieu sera une * Ellipse ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec differens signes, le lieu sera une * Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres.

* Art. 310.
* Art. 324.
* Art. 332.

Second cas. Lorsque le plan xy se trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés yy & xx ne s'y rencontre ou seulement l'un des deux, le lieu sera * une Hyperbole entre ses Asymptotes. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec differens signes, le lieu sera * une Hyperbole rapportée à ses diametres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes signes, on délivrera le quarré yy de fractions, & le lieu sera * une Parabole lorsque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie xy est égal à la fraction qui multiplie le quarré xx; une * Ellipse ou un cercle lorsqu'il est moindre; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres lorsqu'il est plus grand.

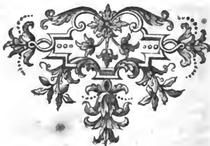
* Art. 339.
* Art. 332.
* Art. 310.
* Art. 324.
* Art. 332.

On décrira le lieu selon l'article 310. s'il est une Parabole; selon l'article 324. s'il est une Ellipse ou un cercle; selon l'article 332. s'il est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres; & enfin selon l'article 339. si c'est une Hyperbole entre ses Asymptotes. Tout ceci n'est qu'une suite de ces quatre articles.

COROLLAIRE.

346. UNE équation du second degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

* *Art.* 314. les régles prescrites est le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x; il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que cette seule Séction qui soit le lieu de l'équation donnée.



LIVRE HUIT.

LIVRE HUITIEME.

Proposition generale.

347. TROUVER *le lieu d'une infinité de points qui ayent tous certaines conditions marquées ; lorsque ce lieu ne passe point le second degré.* FIG. 184.

1°. On supposera comme connuës & déterminées deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, qui fassent entr'elles un angle APM donné ou pris à discretion ; & dont l'une AP ait une origine fixe & invariable en un point A, & s'étende le long d'une ligne donnée de position ; & l'autre PM qui détermine toûjours par son extremité M, l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & soit toûjours parallele à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la solution du Problême, & on les exprimera par des lettres ; sçavoir, les connuës par les premieres lettres de l'Alphabet, & les inconnuës par les dernieres. 3°. On regardera la question comme resoluë, & aprés en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës. 4°. Cette équation dans laquelle on suppose que les inconnuës x & y ayent au plus deux dimensions, étant formée, on en construira le lieu selon les regles prescrites dans le Livre précédent ; & le lieu ainsi construit resoudra la question. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

348. TROUVER dans l'angle donné BAC le point M, tel qu'ayant mené de ce point les deux droites MF, MG, qui fassent sur les côtés AB, AC, toûjours vers la même part, des angles donnés MFB, MGC ; la FIG. 184.

droite MF soit toûjours à la droite MG en la raison donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en est par conséquent le lieu.

Par le point M, que l'on suppose être un des points cherchés, ayant mené la ligne MP parallele à AC; on considerera les deux droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, comme connuës & déterminées. On prendra sur le côté AB la partie $AB = a$, on tirera les droites BC, BD, paralleles à MF, MG, & qui rencontrent aux points C, D, l'autre côté AC prolongé, s'il est necessaire; & on nommera les connuës AC, c; BC, f; BD, g. Presentement menant MQ parallele à AB, les triangles semblables ACB, PMF, & ABD, QMG, donneront ces deux proportions: $AC(c) . CB(f) :: MP(y) . MF = \frac{fy}{c}$, & $AB(a) . BD(g) :: MQ$ ou $AP(x) . MG = \frac{gx}{a}$; ce qui satisfait à la premiere condition du Problême, puisque les lignes MF, MG, sont toûjours supposées paralleles aux deux mêmes droites BC, BD, qui font sur les côtés AB, AC, les angles donnés. Or par la seconde condition qui reste à accomplir, il faut que $MF(\frac{fy}{c}) . MG(\frac{gx}{a}) :: a . b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{cgx}{bf}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu sera par conséquent
*Art. 306. celui que l'on cherche. Il se construit * ainsi.

Ayant pris sur la ligne AP, la partie $AH = b$, soit menée $HE = \frac{cg}{f}$ parallele à PM & du même côté, & soit tirée la droite indéfinie AE. Je dis qu'elle sera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené par un de ses points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles aux deux côtés AC, AB, & les droites MF, MG, paralleles à BC, BD, & qui font par conséquent sur les deux côtés AB, AC, les angles donnés; on aura à cause des triangles sembla-

bles AHE, APM, cette proportion; $AH(b)$. $HE(\frac{cg}{f})::AP(x)$. $PM(y)=\frac{cgx}{bf}$, & à cause des triangles semblables ACB, PMF, & ABD, QMG, ces deux autres: $AC(c)$. $CB(f)::MP(\frac{cgx}{bf})$. $MF=\frac{gx}{b}$; & $AB(a)$. $BD(g)::MQ$ ou $AP(x)$. $MG=\frac{gx}{a}$. Et par conséquent $MF(\frac{gx}{b})$. $MG(\frac{gx}{a})::a.b$. Ce qui étoit proposé.

Je n'ai resolu cette question par le calcul, que pour la rapporter à la Proposition générale, & commencer par des Exemples simples & aisés à en faire voir l'application; car on peut resoudre ce Problême sans aucun calcul, & d'une maniere plus facile en cette sorte.

Soient tirées les droites AK, AL, qui fassent sur AB, AC, les angles donnés KAB, LAC, & qui soient entr'elles en la raison donnée de a à b. Soient menées les droites KM, LM, paralleles aux côtés AB, AC, & qui se rencontrent au point M; par où, & par le sommet A de l'angle donné BAC, soit tirée la ligne AM: Je dis qu'elle sera le lieu cherché. FIG. 185.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques E les droites ER, ES, paralleles à AK, AL; on aura à cause des triangles semblables AER, MAK, & AES, MAL, ces proportions ER. $AK::AE$. $AM::ES$. AL. Et partant ER. $ES::AK$. $AL::a.b$.

EXEMPLE II.

349. Les paralleles AB, CD, étant données de position; trouver le lieu de tous les points M tellement placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites MP, MG, qui fassent avec elles toûjours vers la même part des angles donnés MPB, MGD; elles soient toûjours entr'elles en la raison donnée de a à b. FIG. 186.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées AP (x), un point quelconque A de la ligne AB, & les deux

droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$ étant supposées connuës & déterminées, on menera les lignes AC, AE, paralleles aux deux droites MP, MG; & on nommera les connuës AC, c; AE, f; Cela fait, on prolongera PM jusqu'à ce qu'elle rencontre CD en i; & les triangles semblables CAE, FMG, donneront $AC(c) . AE(f) :: MF(c-y) . MG = \frac{cf-fy}{c}$. Or selon la condition du Problême qui reste à accomplir, il faut que $MP(y) . MG(\frac{cf-fy}{c}) :: a . b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc+af}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu qui est* une ligne droite indéfinie HM menée parallelement à AB en sorte que $AH = \frac{acf}{bc+af}$, est par conséquent le lieu cherché.

* Art. 307.

EXEMPLE III.

350. DEUX points A, B, étant donnez, en trouver un troisiéme M, tel qu'ayant mené les droites MA, MB; elles soient toûjours entr'elles en raison donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points M, il est question de décrire le lieu qui les renferme tous.

FIG. 187.

Il peut arriver trois differens cas selon que a est moindre, plus grand, ou égal à b.

Premier cas. Par le point M, que je suppose être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne MP perpendiculaire sur AB (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problême, on choisit l'angle droit comme le plus simple), & les deux droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$ étant supposées connuës & déterminées; on nommera la donnée AB, c; & à cause des triangles rectangles APM, BPM, on aura les quarrés $\overline{AM}^2 = xx+yy$, $\overline{BM}^2 = cc-2cx+xx+yy$. Or par la condition du Problême, $\overline{AM}^2 (xx+yy) . \overline{BM}^2 (cc-2cx+xx+yy) :: aa . bb$. D'où (en mul-

tipliant les extrêmes & les moyens & divisant ensuite par $bb-aa$) on forme cette équation $yy+xx+\frac{2aacx}{bb-aa}-\frac{Aacc}{bb-aa}=0$, qui renferme la condition du Problême, & dont le lieu qui est par conséquent celui qu'on demande, se construit par le moyen de l'article 322. (Liv. préced.) en cette sorte.

Soit prise sur la ligne AP, la partie $AC=\frac{aac}{bb-aa}$ du côté opposé à PM; & soit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE=\frac{abc}{bb-aa}$ la circonference d'un cercle. Je dis que sa portion DMO renfermée dans l'angle PAO, fait par la ligne AP & par la droite AO menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. FIG. 187.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la perpendiculaire MP sur AB, on aura par la proprieté du cercle $\overline{CD}^2-\overline{CP}^2$ ou $EP\times PD=\overline{PM}^2$; c'est à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation précedente.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans l'angle EAK opposé au sommet à l'angle BAO dans lequel on a supposé en faisant le calcul qu'ils étoient situés, on trouvera en faisant * $AP=-x$, & $PM=-y$, la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême, que par la proprieté de la portion RME de la même circonference que l'on vient de décrire; d'où il suit que cette portion est le lieu de tous les points cherchés M, lorsqu'ils tombent dans l'angle RAE. Et si l'on suppose enfin que les points M tombent dans l'angle BAR & ensuite dans l'angle EAO, on trouvera de même (en observant de faire $PM=-y$, lorsqu'il tombe de l'autre côté de la ligne AB; & $AP=-x$, lorsque le point P tombe de l'autre côté du point fixe A) que les portions DR, EO, de la même circonference seront les lieux de ces points; & qu'ainsi la circonferen-

* Art. 304.

ce entiere qui a pour diametre la ligne DE, est le lieu complet de tous les points requis M.

Second cas. On trouvera par un raisonnement semblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa - bb} + \frac{aacc}{aa - bb} = o$, dont le lieu se construit ainsi.

FIG. 188. Soit prise sur AP, la partie $AC = \frac{aac}{aa - bb}$ du côté de PM; & soit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{aa - bb}$ un cercle. Je dis que sa circonference sera le lieu de tous les points requis M. Cela se prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on considere dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre DE, & qui est le lieu de tous les points cherchés M, doit couper la ligne AB en deux points D, E, tels que $AD . DB :: a . b$, & $AE . EB :: a . b$; puisque le point M tombant en D la droite AM devient AD; & BM, BD; & de même que le point M tombant en E, la droite AM devient AE, & BM, BE: on abregera de beaucoup les constructions précedentes. Car il est visible qu'ayant divisé la ligne AB prolongée, du côté qu'il sera necessaire, en deux points D, E, tels que $AD . DB :: a . b$, & $AE . EB :: a . b$; la ligne DE sera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui est le lieu cherché.

Troisiéme cas. Puisque dans ce cas $a = b$, l'équation
* Art. 307. précedente se change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit *
FIG. 189. que si l'on prend AP égale à la moitié de AB & qu'on tire la droite PM perpendiculaire sur AB, cette ligne PM indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera le lieu de tous les points requis M. Ce qui est d'ailleurs évident par les Elemens de Geometrie.

EXEMPLE IV.

FIG. 190. 351. DEUX lignes droites DE, DN, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point D, étant données

de poſition ſur un plan, avec un point C hors de ces lignes ; ſoit imaginé un angle donné CEM ſe mouvoir par ſon ſommet E le long de DE, en ſorte que ſon côté EC qui rencontre DN en N, paſſe toûjours par le même point C, & que ſon autre côté EM ſoit toûjours troiſiéme proportionnel à NC, CE. On demande le lieu de tous les points M dans ce mouvement.

Soient menées CA parallele à DN ; & CB qui faſſe ſur DE au point B un angle égal à l'angle donné CEM, du côté qu'il ſera neceſſaire, afin que CE tombant ſur CB la droite EM tombe ſur DE. Cela poſé, je diſtingue la queſtion en trois differens cas : car ou le ſommet E de l'angle donné CEM ſe meut ſur la droite DE de l'autre coté du point B par rapport au point A ; ou entre les points B, A ; ou enfin de l'autre côté du point A par rapport au point B.

Premier cas. Lorſque le ſommet E ſe meut ſur la ligne DE de l'autre côté du point B par rapport au point A. Ayant mené du côté du point C la ligne AQ qui faſſe ſur DE au point A l'angle BAQ égal à l'angle ABC, on tirera par l'un des points cherchés M, que l'on regarde comme donné, la ligne MP parallele à AQ, & qui rencontre DE en P ; & on aura deux triangles ſemblables CBE, EPM ; car les deux angles CBE, EPM, ſont égaux chacun à l'angle donné CEM, & de plus les angles BCE, PEM, ſont auſſi égaux entr'eux ; puiſque dans le triangle CBE l'angle externe CEP ou $CEM + PEM$ eſt égal aux deux internes oppoſés BCE & CBE ou CEM. Si donc l'on nomme les données AD, a ; AB, b ; BC, c ; & les inconnuës & indéterminées AP, x ; PM, y ; AE, z ; on aura, tant à cauſe des paralleles DN, AC, que de la condition du Problême, ces proportions $AD(a). AE(z) :: CN. CE :: CE. EM :: CB(c). EP(x-z) :: BE(z-b). PM(y)$; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations $ax - az = cz$ & $ay = zz - bz$, qui, en prenant, pour abreger,

$f = a + c$, & faisant évanoüir z, se reduisent à celle-ci $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = o$ qui ne renferme plus que les inconnuës x & y, & dont le lieu, qui est celui que l'on cherche, se construit * ainsi.

* Art. 310.

Soit prise sur la ligne AP, la droite $AF = \frac{bf}{2a}$ du côté de PM; & ayant mené FL parallele à PM, soit prise sur cette ligne du côté opposé à PM, la partie $FG = \frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diametre GL qui ait pour origine le point G, pour parametre $GH = \frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites LM paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Je dis que sa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAQ, sera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP & qui rencontre le diametre CL en L, on aura ML ou $PF = x - \frac{bf}{2a}$ & $GL = y + \frac{bb}{4a}$, & par la proprieté de la Parabole, $\overline{ML}^2$ $\left(xx - \frac{bf}{a}x + \frac{bbff}{4aa}\right) = LG \times GH \left(\frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa}\right)$; ce qui en transposant à l'ordinaire donne l'équation $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = o$, qu'il falloit construire.

Second cas. Lorsque le sommet E parcourt la partie BA. Il est clair dans ce cas que les points M tomberont de l'autre côté de DE, puisque l'angle donné CEM sera toûjours plus grand que l'angle CEP qui diminuë continuellement. C'est pourquoi j'ai $PM = -y$, & comme je trouve par un raisonnement semblable au précedent, la même équation; il s'ensuit que la portion AGO de la Parabole que l'on vient de décrire, sera le lieu de tous les points M, puisqu'elle donne aussi par sa proprieté cette même équation.

Troisiéme cas. Lorsque le sommet se meut de l'autre côté

côté du point A par rapport au point B. Il eſt clair encore dans ce cas que tous les points cherchés M doivent tomber au deſſous de la ligne DE; & on trouvera comme dans le premier cas $AD.\ AE :: CN.\ CE :: CF.\ EM :: CB.\ EP$. Et partant $AD.\ CB :: AE.\ EP$. D'où l'on voit que EP eſt plus grande, moindre, ou égale à EA ſelon que CB eſt plus grande, moindre, ou égale à AD; & qu'ainſi prolongeant AQ au deſſous de DE vers K, tous les points cherchés M tombent dans l'angle BAK dans le premier de ces trois cas, dans ſon complement à deux droits DAK dans le ſecond cas, & enfin ſur la droite AK dans le troiſiéme cas. Je ſuppoſe ici que CB ſoit plus grande que AD; & comme faiſant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de AP, je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la conſtruction de ce cas. C'eſt pourquoi nommant à l'ordinaire AP, x; PM, y; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{gg}{a}y = 0$, dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu qui eſt celui que l'on cherche eſt une portion indéfinie AM d'une autre Parabole que la précedente laquelle s'étend vers le côté oppoſé, & qui ſe conſtruit * en cette ſorte. * *Art.* 310.

Soit priſe ſur AP de l'autre côté de PM la partie $AS = \frac{bg}{2a}$; ſoit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallele à AQ, & du côté oppoſé à PM; ſoit décrite du diametre TS qui ait pour origine le point T, pour parametre une ligne $= \frac{gg}{a}$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAK ſera le lieu de tous les points cherchés M dans ce dernier cas, où l'on ſuppoſe que CB ſurpaſſe AD.

Il eſt donc évident que le lieu cherché de tous les points M eſt compoſé de deux portions indéfinies de differentes Paraboles, dont l'une $AGOM$ s'étend du côté de C, & l'autre AM du côté oppoſé, & partent

toutes deux du point A; car le côté CE de l'angle donné CEM tombant sur CA paraliele à DN, il est clair que CN devient infinie, & qu'ainsi EM est nulle ou zero, puisqu'on a toûjours $NC. CE :: CE. EM$: c'est à dire que le point M se confond avec le point E qui tombe sur le point D. D'où l'on voit que AF est une ordonnée au diametre FG, & AS au diametre ST; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est generale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie AP de part & d'autre du point B les parties BO, BR, égales chacune à la quatriéme proportionnelle aux trois lignes DA, AB, BC; on menera par les points de milieu F, S, l'un de AO, l'autre de AR, les droites FG, ST, paralleles à AQ, & égales chacune à la troisiéme proportionnelle à $4AD$, & à AB; sçavoir, FG du côté opposé au point C, & ST du même côté. Cela fait, on décrira deux differentes Paraboles dont l'une aura pour diametre GF & pour ordonnée FA, & l'autre pour diametre TS & pour ordonnée SA; je dis que leurs portions indéfinies $MAGOM$ seront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car BO ou $BR = \frac{bc}{a}$, & partant AF ou $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; & de même AS ou $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Donc &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne DE, étoit égal au complement à deux droits de l'angle CEM, sans rien changer au reste; c'est à dire que les points M tombassent sur la ligne EM prolongée de l'autre côté du point E: le lieu de tous les points M seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points A, B, C, étoient situés differemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement; on arriveroit toûjours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être differentes des précedentes que par quelques signes, & dont les lieux seroient par conséquent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a proposé ce Problême avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'Avril de l'année 1693. ce qui a donné occasion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû resoudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paroître par la solution des autres qu'il est fort versé dans la Geometrie.

EXEMPLE V.

352. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée de position, avec deux points fixes A, C, l'un sur cette droite, & l'autre au dehors; soit décrite une Parabole AM qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne AP dont l'origine soit en A; & soit menée du point donné C une perpendiculaire CM à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points M, dont il est visible qu'il y a une infinité; puisque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles differentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie AP, dont l'origine soit toûjours en A. FIG. 191.

Ayant mené par le point donné C la perpendiculaire CB sur AP, & par un des points cherchés M que l'on regarde comme donné, les droites MP, MK, paralleles à BC, AP, & la tangente MT; on nommera les données AB, a; BC, b; & les inconnuës & indéterminés AP, x; PM, y; ce qui donne $CK = b - y$, $MK = a + x$. Or par la condition du Problême, l'angle CMT est droit; & par conséquent les triangles rectangles TPM, CKM, seront semblables; car si l'on ôte des angles droits CMT, KMP, le même angle KMT,

* Art. 22. & 23. les restes CMK, TMP, seront égaux. Donc TP* $(2x)$. $PM(y) :: CK(b-y)$. $KM(a+x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy-by+2xx+2ax=0$, dont le lieu qui est
* Art. 322. celui qu'on demande est * une Ellipse que l'on construit *
* Art. 324. en cette sorte.

Ayant mené $AD=\frac{1}{2}b$ perpendiculaire à AP & du côté de PM, & tiré la droite indéfinie DL parallele à AP, on prendra sur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point E les parties EF, EG égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{8}bb}$. Ensuite de l'axe FG qui ait pour parametre une ligne GH double de FG, on décrira une Ellipse. Je dis que sa portion AMO renfermée dans l'angle PAD est le lieu de l'équation précedente; & par conséquent de tous les points cherchés M, lorsqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant PM, s'il est necessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & $EL=\frac{1}{2}a+x$, & par la proprieté de l'Ellipse, $FL\times LG$ ou $\overline{EF}^2-\overline{EL}^2$ $(\frac{1}{8}bb-ax-xx)$. $\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb-by+yy) :: FG.\ GH :: 1.\ 2$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb-2ax-2xx=\frac{1}{4}bb-by+yy$. Donc &c.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans les angles BAD, BAR, on trouvera toûjours la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême que par la proprieté de l'Ellipse; en observant de faire $AP=-x$, & $PM=-y$, lorsque le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & PM, de l'autre côté de la ligne AP. D'où il suit que les portions de l'Ellipse, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles sont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il est impossible qu'aucun des points cherchés M, tombe dans l'angle PAR, opposé au sommet à l'angle BAD dans lequel est situé le point donné C, d'où doivent partir toutes les perpendiculaires aux Paraboles. Car si d'un point quelconque pris

dans cet angle PAR, on mene des droites comme MP, MT, perpendiculaires sur AP & CM, il est visible que les points P, T, tomberont du même côté du point A, & par consequent que cette ligne MT ne pourra être tangente en M comme le demande la question.

Si l'on suppose que $AP(x)$ devienne nulle ou zero, l'équation précedente $yy - by + 2xx + ax = 0$ se changera en celle-ci $yy - by = 0$, dont les deux racines sont $y = 0$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant AO parallele & égale à BC, le lieu des points cherchés M passera par les deux points A, O. On prouvera de même en supposant que le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & faisant $AP(-x) = AB(a)$, que ce même lieu passera par les points B, C; de sorte que l'Ellipse doit être décrite autour du rectangle $ABCO$. Ceci donne lieu à une nouvelle construction que voici.

Soit formé le rectangle $ABCO$, & soit décrite * autour de ce rectangle une Ellipse, dont l'axe FG parallele aux côtés AB, OC, soit à son parametre GH, comme 1 est à 2. Il est évident qu'elle sera le lieu cherché. * Art. 176.

REMARQUE. I.

353. Si la nature des lignes courbes telles que AM étoit exprimée par l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ (les lettres m, n marquent les exposans des puissances de y & x tels qu'ils puissent être) qui renferme * non seulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous les degrés à l'infini; on auroit $TP^*(\frac{n}{m}x) . PM(y) :: CK(b-y) . KM(a+x)$: ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu qui est celui qu'on cherche, est une Ellipse que l'on construira selon l'article 322. ou bien selon l'article 176. si l'on observe que cette Ellipse doit passer autour du rectangle donné $ABCO$, & que son axe FG parallele aux côtés AB, OC, doit être * Art. 2. * Art. 237.

à son parametre GH en la raison donnée de m à n.

REMARQUE II.

FIG. 191. 354. Si le centre E de l'Ellipse qu'on vient de décrire tomboit sur l'origine A de l'axe commun AP de toutes les Paraboles AM; & l'axe FG de l'Ellipse sur l'axe AP des Paraboles: cette Ellipse couperoit toutes ces differentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Theorême de la maniere qui suit.

FIG. 192. Soient une infinité de Paraboles comme AM de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne AP, dont l'origine est toûjours au même point A; & soit une Ellipse qui ait pour centre le point A, & dont l'axe FG situé sur AP soit à son parametre, comme le nombre m exposant de la puissance de $AP(x)$ est au nombre n exposant de la puissance de $PM(y)$, dans l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles AM. Je dis que cette Ellipse coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point M, où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente MT à cette Parabole, & MS perpendiculaire à cette tangente; il est question de prouver que MS touche l'Ellipse au point M. Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire MP sur l'axe, & ayant nommé les indéterminées AP, x; PM, y; & la donnée $FG, 2t$; on aura par la proprieté de l'Ellipse $FP \times PG (tt - xx) . \overline{PM}^2 (yy) :: m . n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cause des angles droits TPM, * Art. 157. TMS, il vient $TP^* (\frac{n}{m} x) . PM (y) :: PM (y) . PS = \frac{myy}{nx}$, & parconsequent AS ou $AP + PS = \frac{nxx + myy}{nx}$ $= \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur que l'on vient de trouver $ntt - nxx$. D'où l'on voit que $AP . AF :: AF . AS$, * Art. 57. & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Ellipse au point M. *Ce qu'il falloit &c.*

EXEMPLE IV

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP, AO, données de position, qui font entr'elles un angle droit PAO; & soient conceuës partir d'un point donné C une infinité de perpendiculaires comme CM à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points M, où chacune des droites CM rencontre l'Hyperbole à laquelle elle est perpendiculaire. FIG. 193.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple précedent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion TP * (x). PM (y) :: CK $(b-y)$. KM $(a-x)$; ce qui donne cette équation $yy-by-xx+ax=0$, dont voici * le lieu. * Art. 107. * Art. 330. ou 335.

Ayant pris sur l'Asymptote AO parallele à PM, la partie $AD=\frac{1}{2}b$, & mené DL parallele à AP; on prendra sur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ selon que a est plus grand ou moindre que b. On décrira ensuite de la ligne FG, comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, deux Hyperboles opposées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle PAO, seront le lieu de cette équation, & par consequent celui de tous les points cherchés M.

Car prolongeant PM (s'il est necessaire) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG, en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & la partie $EL=x-\frac{1}{2}a$; &* par la proprieté des Hyperboles équilateres $\overline{EL}^2 \pm \overline{EF}^2$ $(xx-ax+\frac{1}{4}bb)=\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb-by+yy)$. Donc &c. * Art. 127.

Si $a=b$, la construction précedente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe EF ou EG devient nulle. Et comme l'équation précedente devient celle-ci $yy-ay-xx+ax=0$, ou $yy-ay+\frac{1}{4}aa=xx-ax+\frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y-\frac{1}{2}a=x-\frac{1}{2}a$ ou $y=x$, & $\frac{1}{2}a-y=x-\frac{1}{2}a$ ou $y=a-x$; il s'ensuit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales AC, BO: elles seront le lieu de tous les points cherchés M. Car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y=x$, & l'autre diagonale BO est le lieu de la deuxiéme $y=a-x$.

FIG. 194.

REMARQUE I.

356. Si la nature des lignes courbes qui ont pour Asymptotes les droites AB, AO, étoit exprimée par l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui renferme * les Hyperboles de tous les degrés à l'infini, on auroit TP * $(\frac{n}{m}x)$. PM (y) :: CK $(b-y)$. KM $(a-x)$; ce qui donne $yy-by-\frac{n}{m}xx+\frac{n}{m}ax=0$, dont le lieu se construit * ainsi.

FIG. 195.
* Art. 229.
* Art. 237.
* Art. 330.

Ayant trouvé le point E comme dans l'exemple, on prendra sur DL de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{m}{4n}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb-\frac{1}{4}aa}$ selon que naa est plus grand ou moindre que mbb. Ensuite de la ligne FG comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, qui soit à son parametre en la raison donnée de m à n, on décrira deux Hyperboles opposées: leurs portions renfermées dans l'angle OAB seront le lieu qu'on cherche.

Si $a.b::\sqrt{m}.\sqrt{n}$, l'équation $yy-by-\frac{n}{m}xx+\frac{n}{m}ax=0$ se change en celle-ci $yy-ay\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{n}{m}xx+\frac{n}{m}ax=0$, ou $yy-ay\sqrt{\frac{n}{m}}+\frac{naa}{4m}=\frac{n}{m}xx-\frac{n}{m}ax+\frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient

FIG. 194.

vient $y - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$, ou $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} - y = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$ ou $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$. D'où il suit que si l'on acheve le rectangle *ABCO*, & qu'on tire les diagonales *BO*, *AC*; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés *M*: car la diagonale *AC* est le lieu de la premiere équation $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$, & l'autre diagonale *BO* le lieu de la seconde $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$.

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné *ABCO*; & comme l'axe *FG*, parallele aux côtés *AB*, *OC*, doit être à son parametre en la raison donnée de *m* à *n*, il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.) FIG. 193.

REMARQUE II.

357. Si le centre *E* de l'Hyperbole *BFC* tomboit sur le point *A*, & son axe *FG* sur la ligne *AP*; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites *AP*, *AO*; ce qu'on peut énoncer ainsi. FIG. 193.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites *AP*, *AO*, qui font entr'elles un angle droit; & soit une Hyperbole ordinaire *FM* qui ait pour centre le point *A*, & dont le premier axe *FG* situé sur *AP*, soit à son parametre comme le nombre *m* exposant de la puissance de *AP* (x) est au nombre *n* exposant de la puissance de *PM* (y) dans l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles *MAM*. Je dis que l'Hyperbole *FM* coupe à angles droits toutes ces differentes Hyperboles. FIG. 195.

Ayant mené par le point M où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente MT à cette Hyperbole, & une perpendiculaire MS à cette tangente; il s'agit de prouver que l'angle TMS sera droit. Pour le faire, on tirera MP perpendiculaire sur l'Asymptote AP; & ayant nommé les indéterminés AP, x; PM, y; & la donnée $FG, 2t$; on aura par la proprieté de l'Hyperbole FM cette proportion $FP \times PG\ (xx-tt)$. $\overline{PM}^2\ (yy) :: m.\ n$, & partant $myy = nxx - ntt$. Or à

* Art. 137. cause des angles droits TPM, TMS, il vient $TP^*\ (\frac{n}{m}x)$. $PM\ (y) :: PM(y)$. $PS = \frac{myy}{nx}$. Et par consequent AS ou $AP - PS = \frac{nxx-myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que AS est troisiéme proportionnelle à AP, AF;

* Art. 121. & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Hyperbole FM au point M. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE VII.

FIG. 196. 358. LA Parabole BAC étant donnée, on demande le lieu de tous les points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes MB, MC, à cette Parabole; l'angle BMC qu'elles comprennent soit toûjours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné BMC soit aigu, obtus, ou droit; ce qui fait trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'angle donné BMC est aigu.

* Art. 160. Ayant mené * l'axe AD de la Parabole donnée BAC, qui rencontre les tangentes MB, MC, aux points F, G, on tirera sur cet axe des points touchans B, C, & du point de concours M, les perpendiculaires BD, CE, MP. Et ayant mené MN qui fasse sur l'axe AD l'angle FNM égal à l'angle FMG complement à deux droits de l'angle donné BMC, on nommera les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; AF, s; AG, t;

& le parametre de l'axe AD, ſçavoir, AV, a; lequel eſt donné, puiſque la Parabole BAC eſt donnée. Cela poſé; à cauſe du triangle rectangle FPM, on aura le quarré $\overline{FM}^2 = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant diviſé par $FG\,(s-t)$ donnera $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s-t} = FN$, à cauſe des triangles ſemblables FGM, FMN; & partant PN ou $FP - FN = \frac{sx + tx - st - xx - yy}{s-t}$. Je cherche à preſent par le moyen de la Parabole donnée BAC des valeurs de $s+t$, st, & $s-t$ par rapport à x & y, afin qu'étant ſubſtituées, dans la valeur de PN, cette ligne ne renferme plus dans ſon expreſſion d'autres inconnuës que x & y. Ce que je fais ainſi.

Les triangles ſemblables FPM, FDB; & GPM, GEC, donnent $FP\,(s-x).\,PM\,(y) :: FD$* $(2s).\,BD$* $(\sqrt{as})$. *Art. 22.
Et $GP\,(x-t).\,PM\,(y) :: GE\,(2t).\,CE\,(\sqrt{at})$. D'où je *Art. 7.
forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = 0$, & $tt - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = 0$; c'eſt à dire (en faiſant $p = 2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = 0$, & $tt - pt + xx = 0$. Je retranche la ſeconde équation de la premiere, & j'ai $ss - tt - ps + pt = 0$ qui étant diviſée par $s - t$ donne $s + t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps - ts = ps - xx$ à cauſe de la premiere équation, d'où je tire $st = xx$. Si l'on ôte $4xx$ valeur de $4st$ de pp valeur de $ss + 2ts + tt$, on formera enfin cette égalité $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ en mettant pour p ſa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à preſent à la place de $s+t$, st, & $s-t$, leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, xx, & $\frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$ dans $\frac{sx + tx - st - xx - yy}{s-t}$, on trouvera $PN = \frac{4xy - ay}{4\sqrt{ax+yy}}$. Or ſi

l'on prend sur l'axe la partie NQ égale au parametre $AV(a)$, & qu'on tire QT parallele à PM, & qui rencontre en T la droite MN prolongée autant qu'il sera necessaire; il est visible que la ligne QT sera donnée, puisque dans le triangle rectangle NQT, l'angle QNT qui est égal à l'angle donné BMC est donné, & que de plus le côté NQ qui est égal au parametre AV de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cause des triangles semblables NPM, NQT, on aura cette proportion, $NP \left(\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}\right)$. $PM(y) :: a.b$, & partant $4a\sqrt{yy + ax} = 4bx - ab$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = 0$, dont le lieu (qui est celui qu'on cherche) se construit * en cette sorte.

* Art. 330. & 331.

Soit prise sur l'axe AD de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ du côté de PM; & de part & d'autre du point H les parties HI, HK, égales chacune à $\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui soit à son parametre KL comme aa est à bb, une Hyperbole KM. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2 \left(xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa\right) . \overline{PM}^2 (yy) :: IK . KL :: aa . bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation précedente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas FN sera toûjours moindre que FP; puisque l'angle FNM, qu'on a pris égal au complement à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi $\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ valeur de $FP - FN$ doit être positive; & par consequent x doit toûjours surpasser $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait

une portion de l'Hyperbole opposée à KM qui soit renfermée dans l'angle PAV fait par la ligne AP & par la droite AV menée parallelement à PM & du même côté, elle ne peut pas neanmoins faire partie du lieu des points M; parce que AI étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée AP qui seroit alors moindre que AI, seroit à plus forte raison moindre que $\frac{1}{4}a$.

Second cas. Lorsque l'angle donné est obtus. En supposant que les points M tombent dans l'angle PAV, & par un raisonnement semblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par consequent la construction du lieu demeurera la même. Mais il faut observer dans ce second cas que FN sera plus grande que FP, & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}$ de $FP - FN$ deviendra negative; d'où il suit que x sera toûjours moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché sera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle se trouve renfermée dans cet angle PAV. Et comme en supposant que les points M tombent dans l'angle DAV, on trouve encore la même équation, il s'ensuit que cette Hyperbole entiere sera le lieu de tous les points cherchés M.

De là il est évident que si une Hyperbole KM est le lieu de tous les points M lorsque l'angle donné BMC est aigu, son opposée sera le lieu de tous ces points lorsque l'angle donné sera égal au complement à deux droits de l'angle BMC, parce qu'alors les lignes données a & b qui déterminent la construction des Hyperboles demeurent les mêmes.

Troisiéme cas. Lorsque l'angle donné est droit. Il est clair que FN est alors égale à FP, & qu'ainsi la valeur FIG. 196. 197.
$\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}$ de $FP - FN$ sera nulle ou zero. D'où l'on voit * que si l'on prend sur l'axe AD prolongé vers son origine A la partie $AP = \frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie PM; cette ligne qui n'est autre *Art. 306.

que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, sera le lieu cherché.

COROLLAIRE.

FIG. 196. 197. 359. Si l'on mene le demi-second axe HO, & qu'on tire l'hypothenuse KO; les triangles rectangles KHO, NQT seront semblables: car puisque le second axe est moyen proportionnel entre le premier IK & son parametre KL, il s'ensuit que $\overline{KH}^2 . \overline{HO}^2 :: IK . KL :: aa . bb$, & qu'ainsi $KH . HO :: NQ(a) . QT(b)$. L'angle HKO (qui selon la définition 11. du 3. Livre, est égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole KM) sera donc égal à l'angle QNT, c'est à dire, à l'angle donné BMC; & on aura $NQ(a) . QT(b) :: KH\left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$; & $NQ(a) . NT(\sqrt{aa+bb}) :: KH\left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . KO = \frac{a^3+abb}{2bb}$. Or si l'on pose l'hypothenuse KO du triangle rectangle KHO fait par les deux demi-axes HK, HO, sur le premier axe IK depuis le centre H, en R & S; il est

* Art. 74. clair * que ces deux points seront les deux foyers de l'Hyperbole KM & de son opposée; & que $RA = \frac{1}{4}a$, puisque $HR = \frac{a^3+abb}{2bb}$ & $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$. D'où l'on voit que le foyer R de l'Hyperbole KM est encore le

* Def. 3. 4. 5. I. foyer * de la Parabole BAC, & que $SR\left(\frac{a^3+abb}{bb}\right) . HO\left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) :: HO\left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) . AR\left(\frac{1}{4}a\right)$, puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorême.

FIG. 196. Si sur la distance SR des foyers d'une Hyperbole KM, on prend du côté de S, la partie RA troisiéme

* Art. 4. proportionnelle à cette distance SR, & à la moitié HO de son second axe; & qu'ayant décrit * une Parabole BAC qui ait pour foyer le point R, & pour axe la li-

gne AR dont l'origine soit en A, on tire d'un point quelconque M de l'Hyperbole KM deux tangentes MB, MC, à cette Parabole: je dis que l'angle BMC qu'elles comprennent, sera toûjours égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes; & que si l'on prend le point M sur l'Hyperbole opposée, l'angle compris par les tangentes, sera toûjours égal au complement à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Asymptotes.

EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie BAP étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes A, D, l'un sur cette ligne & l'autre au dehors; on demande le lieu de tous les points M, dont la proprieté soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes A, D, les droites MA, MD: la ligne AM soit toûjours égale à la partie ME de l'autre droite DM, prise entre le point M & le point E où elle rencontre la ligne MP. Fig. 198.

Du point donné D & du point M que l'on suppose être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires BD, MP, sur la ligne AP, on nommera les données AB, $2a$; BD, $2b$; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y: & on aura $AP = PE$; puisque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles semblables EBD, EPM, donnent EB ou $AE - AB$ $(2x - 2a)$. BD $(2b)$ :: EP (x). PM (y). En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problême, & dont le lieu qui est * une Hyperbole équilatere entre les Asymptotes se construit ainsi. * Art. 337.

Soit tirée la ligne AD que l'on divisera par le milieu en C, par où l'on menera les droites CF, CG, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à AP: soient décrites entre les Asymptotes CF, CG, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point C, par les points D, A, * * Art. 130. 131.

* Def. 16. III. les deux Hyperboles opposées DM, AM, qui sont * équilateres. Je dis qu'elles seront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car les Asymptotes CF, CG, divisent les droites AB, BD en deux parties égales aux points L, K, puisque AD est divisée par le milieu en C; & partant lorsque les points P tombent sur AB prolongée indéfiniment du côté de B, comme l'on vient de supposer en faisant le calcul, la ligne PL ou $CH = x - a$, $HM = y - b$;

* Art. 100. & par la proprieté * de l'Hyperbole $CH \times HM$ $(xy - ay - bx + ab) = CK \times KD\ (ab)$: ce qui donne $xy - ay = bx$.

Si l'on suppose à present que les points P tombent sur BA indéfiniment prolongée du côté de A, ou sur la partie déterminée AB; on trouvera toûjours (en observant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$ lorsqu'ils tombent de l'autre côté du point A & de la ligne AP) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Probléme que par la proprieté de l'Hyperbole AM ou DM. Donc &c.

COROLLAIRE.

361. De-là il est évident que les parties MR, MS des deux droites AM, DM, comprises entre le point M & l'une ou l'autre des Asymptotes, sont égales entr'elles. Car 1°. Lorsque l'Asymptote, comme CF, est parallele à la ligne AP, l'angle RSM est égal à l'angle AEM, & l'angle SRM à l'angle MAE. 2°. Lorsque l'Asymptote, comme CG, est perpendiculaire à AP, l'angle RSM sera le complement à un droit de l'angle AEM à cause du triangle rectangle SLE, & de même l'angle SRM ou son opposé au sommet ARL est le complement à un droit de l'angle EAM à cause du triangle rectangle RAL. Donc puisque les angles EAM, AEM, sont égaux, il s'ensuit que le triangle RMS sera isoscelle, & qu'ainsi les côtés MR, MS, seront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorême suivant.

Si l'on mene d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatere, deux droites *MD*, *MA*, aux extremités d'un de ses premiers diametres *AD*, lesquelles rencontrent l'une ou l'autre Asymptote aux points, *R*, *S*: je dis que les parties *MR*, *MS*, de ces deux droites seront égales entr'elles.

EXEMPLE IX.

362. DEUX cercles *EGF*, *BNO*, dont les centres sont *C*, *A*, etant donnés, & ayant mené par un point quelconque *G* du cercle *EGF* une tangente indéfinie *GNO* qui coupe l'autre cercle *BNO* en deux points *N*, *O*, par lesquels soient tirées les tangentes *NM*, *OM*; on demande le lieu de tous les points de concours *M*. FIG. 199.

Ayant tiré *MP* perpendiculaire sur *CA*, qui passe par les centres *C*, *A*, des cercles donnés; on menera les droites *CG*, *AM*, qui seront paralleles, puisque l'une & l'autre est perpendiculaire sur la même droite *GO* qu'elles rencontrent aux points *G*, *Q*; & on nommera les données *AB* ou *AQ*, a; *CE* ou *CF* ou *CG*, b; *CA*, c; & les inconnuës & indeterminées *AP*, x; *PM*, y. Cela fait, les triangles rectangles semblables *AOM*, *AQO*, donneront $AM (\sqrt{xx+yy}) . AO (a) :: AO (a) . AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant *CH* parallele à *GO*, qui rencontre en *H*, *MA* prolongée, s'il est necessaire, on aura à cause des triangles rectangles semblables *MAP*, *CAH*, cette proportion: $PA (x) . AM (\sqrt{xx+yy}) :: AH$ ou $CG - AQ \left(b - \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}\right) . AC (c)$; ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'est-à-dire, en ôtant les incommensurables, l'équation $yy + \frac{bb-cc}{bb} xx - \frac{2aac}{bb} x - \frac{a^4}{bb} = 0$, dont le lieu est * une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que *CE* (b) est égale, * Art. 345.

plus grande, ou moindre que $CA(c)$. Voici la construction du dernier cas.

Soit prise sur la ligne AP la partie $AR = \frac{aac}{cc-bb}$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point R les parties RI, RK, égales chacune à $\frac{aab}{cc-bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui ait pour parametre $KL = \frac{2aa}{b}$, une Hyperbole. Je dis que sa portion indéfinie DM renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par la droite AD menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation.

Car par la proprieté de l'Hyperbole, $\overline{RP}^2 - \overline{RI}^2 \left(\frac{a^4 + 2aacx}{cc-bb} + xx\right) . \overline{PM}^2 (yy) :: IK \left(\frac{2aab}{cc-bb}\right) . KL \left(\frac{2aa}{b}\right)$; ce qui redonne l'équation précedente.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans l'angle KAD qui est à côté de l'angle PAD, on trouvera encore (en faisant $AP = -x$) la même équation; d'où il suit que la portion déterminée ID de l'Hyperbole IM, avec la moitié entiere de l'Hyperbole qui lui est opposée sera le lieu de ces points, & qu'ainsi ces deux Hyperboles opposées composent le lieu complet de tous les points cherchés M: où l'on doit observer que la portion SIT renfermée dans le cercle BNO est inutile, puisqu'aucun des points de concours M des deux tangentes NO, OM, à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il est à propos de remarquer que $RA \left(\frac{aac}{cc-bb}\right) = \sqrt{\overline{KR}^2 + \frac{1}{4} IK \times KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ainsi puisque le rectangle $IK \times KL$ vaut le quarré de la moitié du second axe, le point A sera * l'un des foyers de l'Hyperbole IM. Or puisque AI ou $AR - RI = \frac{aac - aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{aac + aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c-b}$, il s'ensuit qu'on peut abreger la construction

* Art. 74.

précedente en cette forte.

Soient prifes fur la ligne AC du côté de C, les parties AI, AK, troifiémes proportionnelles à $AF(c+b)$, $AB(a)$, & à $AE(c-b)$, $AB(a)$; & foient décrites du premier axe IK, & du foyer A * deux Hyperboles oppofées. Il eft évident qu'elles feront le lieu de tous les points cherchés M. *Art. 76.

Lorfque $CE(b)$ eft plus grande que $CA(c)$, la conftruction de l'Ellipfe qui eft le lieu des points cherchés M, fe fera de la même maniere que pour l'Hyperbole, en obfervant de prendre la partie AK de l'autre côté du point A par rapport au point C. Et enfin lorfque $CE(b)=CA(c)$, il n'y aura qu'à prendre fur la ligne AC du côté de C, la partie AI troifiéme proportionnelle à AF, AB, & décrire enfuite une Parabole qui ait pour foyer le point A, & pour axe la ligne IA dont l'origine foit en I. FIG. 200.

COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

363. DE LA il eft évident que fi de l'un des foyers A d'une Ellipfe ou de deux Hyperboles oppofées, dont le premier axe eft IK, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris fur cet axe les parties AE, AF, troifiémes proportionnelles à AK, AB, & à AI, AB, (fçavoir AE du côté du point K, & AF du côté du point I), on décrive du diametre EF un cercle EGF: il eft évident, dis-je, que fi l'on tire d'un point quelconque M de la Section, deux tangentes MN, MO, au cercle BNO, la ligne ON qui joint les points touchans étant prolongée, s'il eft neceffaire, touchera toûjours l'autre cercle EGF. FIG. 199.

COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. IL fuit encore de la refolution de ce Problême, que fi du foyer A d'une Parabole IM dont l'axe IA a FIG. 200.

Mm ij

ſon origine en I, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris ſur l'axe du côté de ſon origine, la partie AF troiſiéme proportionnelle à AI, AB, on décrive un cercle AGF du diametre AF; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque M de la Parabole deux tangentes MN, MO, au cercle BNO: la ligne NO qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il eſt neceſſaire, touchera toujours le cercle AGF en un point G.

EXEMPLE X.

FIG. 201. 202. 203. 365. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée ſur un plan, avec un point fixe F hors d'elle; trouver le lieu de tous les points M, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire MP ſur AP, & au point F une ligne droite MF; la raiſon de MP à MF ſoit toujours la même, que celle de la donnée a à la donnée b.

Ayant mené du point donné F ſur la ligne AP la perpendiculaire FA, & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des cherchés, une parallele MQ à AP, on nommera la donnée AF, c; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; qui font entr'elles un angle droit APM. Cela poſé, le triangle rectangle MQF donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2\ (cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2\ (xx)$, & à cauſe de la condition marquée dans le Problême on aura $\overline{MP}^2\ (yy) . \overline{MF}^2\ (cc - 2cy + yy + xx) :: aa . bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$, dont il s'agit maintenant de conſtruire le lieu. Pour en venir à bout, il faut diſtinguer trois differens cas ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à b.

Premier cas. En diviſant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{2aac}{aa - bb} y + \frac{aa}{aa - bb} xx + \frac{aacc}{aa - bb} = 0$, dont le lieu eſt une Ellipſe * que l'on conſtruit en cette ſorte.

* Art. 324.

Soit prise sur AF du côté de F, la partie $AC = \frac{aac}{aa - bb}$; FIG. 201.
& ayant mené par le point C une parallele KH à AP, soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point C, les parties CH, CK, égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa - bb}}$. Ensuite de l'axe KH qui soit à son parametre KL comme $aa - bb$ est à aa, soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation précedente, & par conséquent de tous les points cherchés M.

Car par la proprieté de l'Ellipse, $KE \times EH$ ou $\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2 \left(\frac{bbcc}{aa - bb} - xx\right) . \overline{EM}^2 \left(\frac{a^4cc}{\overline{aa - bb}^2} - \frac{2aacy}{aa - bb} + yy\right) :: KH . KL :: aa - bb . aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que cidessus.

Puisque $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2 :: KH . KL :: aa - bb . aa$, il s'ensuit que le demi-axe CB ou $CD = \frac{abc}{aa - bb}$; & qu'ainsi DF ou $DC + CF = \frac{abc + bbc}{aa - bb} = \frac{bc}{a - b}$, & FB ou $CB - CF = \frac{abc - bbc}{aa - bb} = \frac{bc}{a + b}$. Donc $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa - bb} = \overline{CH}^2$; & partant le point F est * l'un des foyers de cette Ellipse * *Art.* 35.
qui a pour grand axe la ligne BD. Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la précedente : La voici.

Soient prises sur FA du côté de A la partie $FB = \frac{bc}{a + b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a - b}$. Ayant pris DG égal à BF du côté de F; soit décrite des foyers F, G, & de l'axe BD * une Ellipse; il est évident qu'elle * *Art.* 36.
satisfera à la question.

Second cas. On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb - aa} y - \frac{aa}{bb - aa} xx - \frac{aacc}{bb - aa} = 0$, parce que a est moindre que b. Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.). Aprés

avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas précedent, on trouvera cette construction.

FIG. 202. Soient prises sur FA du côté du point A les parties $FB = \frac{bc}{b+a}$, $FD = \frac{bc}{b-a}$. Ayant pris DG égal à BF du côté opposé au point F, soient * décrites des foyers F, G, & du premier axe BD, deux Hyperboles opposées BM, DM. Elles seront le lieu de tous les points cherchés M.

* Art. 76.

Troisiéme cas. L'équation generale $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$ se changeant en cette autre $xx - 2cy + cc = 0$, parce que $a = b$, son lieu est une Parabole

FIG. 203. qu'il est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne AP, & pour foyer le point F, selon qu'il est enseigné dans la définition premiere du premier Livre; elle sera le lieu requis.

COROLLAIRE. I.

366. Il est clair dans le premier cas, que $CF\left(\frac{bbc}{aa-bb}\right) . CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right) :: CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right) . CA\left(\frac{aac}{aa-bb}\right) :: b . a$; & l'on trouve la même chose dans le second cas: ce qui donne lieu à ce Theorême.

FIG. 201. 202. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point C, pour foyers les deux points F, G, & pour premier axe la ligne BD, on prend CA troisiéme proportionnelle à CF, CB, du côté du foyer F; & qu'on mene la droite indéfinie AP perpendiculaire sur BD: je dis que si d'un point quelconque M de la Section, l'on tire sur AP la perpendiculaire MP, & au foyer F la droite MF; la raison de MP à MF, sera toûjours la même que du premier axe BD à la distance FG des foyers.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie AP s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections ; aussi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il est facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné *F*, pour directrice une ligne donnée de position *AP*, & qui passe par un point donné *M* ; car tirant au foyer *F* la ligne *MF*, & & sur la directrice *AP* la perpendiculaire *MP*, & nommant les données *MP*, *a* ; *MF*, *b* ; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points *M* tels que *MP* soit toujours à *MF* comme *a* est à *b*.

COROLLAIRE II.

367. Si l'on joint deux points quelconques *M*, *N*, d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en *C* ; & que du foyer *F*, on tire les droites *FM*, *FN*, *FC* : je dis que la ligne *FC* coupe en deux parties égales l'angle *NFH* complement à deux droits de l'angle *NFM*, lorsque les points *M*, *N*, tombent sur une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole ; & l'angle *NFM*, lorsqu'ils tombent sur deux Hyperboles opposées. FIG. 204. 205.

Car tirant les perpendiculaires *MP*, *NQ*, sur la directrice, & la ligne *ND* parallele à *MF* ; les triangles semblables *MPC*, *NQC*, & *MFC*, *NDC*, donnent *MP*. *NQ* :: *MC*. *NC* :: *MF*. *ND*. Et partant *MP*. *MF* :: *NQ*. *ND*. Or par la proprieté de la Section conique qui a pour directrice la ligne *PQ*, & pour foyer le point *F*, on aura *MP*. *MF* :: *NQ*. *NF*. Les lignes *ND*, *NF*, seront donc égales entr'elles ; c'est pourquoi dans le premier cas l'angle *NDF* ou *CFH* sera égal à l'angle *CFN*, & dans le second l'angle *FDN* ou *CFM* sera égal à l'angle *CFN*. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

368. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole qui passe par trois FIG. 204.

points donnés M, N, O, & qui ait pour foyer le point donné F.

Soient menées par le foyer F, les droites FC, FE, qui divisent par le milieu les angles NFH, NFK, complemens à deux droits des angles donnés MFN, OFN; & par les points C, E, où elles rencontrent les lignes MN, ON, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie CE. Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne CE, pour foyer le point F, & qui passe par le point M: il est clair selon le Corollaire précedent qu'elle passera aussi par les deux autres points N, O.

COROLLAIRE IV.

FIG. 205. 369. ON tire encore du Corollaire second une maniere de décrire deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyer le point F; & dont l'une d'elles passe par deux points donnés M, O, & l'autre par un point donné N.

Soit menée par le point F la ligne FE qui divise par le milieu l'angle HFO complement à deux droits de l'angle MFO formé par les droites FM, FO, tirées du point F aux deux points M, O, qui doivent se trouver dans la même Hyperbole; & soit encore menée par le même point F la ligne FC, qui divise en deux parties égales l'angle MFN formé par les droites FM, FN, tirées du point F aux deux points M, N, qui doivent tomber sur les deux Hyperboles opposées. Par les points E, C; où les lignes FE, FC, rencontrent les droites MO, MN, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie EC. Soient enfin décrites deux Hyperboles opposées, qui ayent pour foyer le point F, pour directrice la ligne EC, & dont l'une d'elles passe par le point M: il est évident qu'elles satisfont à la question.

COROL. V.

COROLLAIRE V.

370. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire second; il est visible que l'angle *MFN* difference de l'angle *CFM* & de son complement à deux droits *CFH* ou *CFN*, diminuë à mesure que le point *N* aproche du point *M*; de sorte qu'il s'évanoüit tout-à-fait, lorsque le point *N* tombe sur le point *M*. L'angle *CFM* sera donc égal alors à son complement à deux droits, & par consequent il sera droit. Or comme la ligne *MN* devient alors la tangente *MT*, puisqu'elle passe * par deux points infiniment proches de la courbe; on voit naître une maniere generale & toute nouvelle de mener d'un point donné *M* sur une Section conique, une tangente *MT*, un foyer *F* avec l'axe qui passe par ce foyer étant donnés. Fig. 204. * Art. 188.

Car ayant trouvé la directrice comme il est enseigné dans le Corollaire second, on menera du point donné *M* au foyer *F* la droite *MF*, sur laquelle on tirera la perpendiculaire *FT* qui rencontre la directrice en *T*, par où & par le point donné *M* on tirera la tangente cherchée *MT*.

EXEMPLE XL.

371. Deux angles *KAM*, *KBM*, mobiles autour des points fixes *A*, *B*, étant donnés sur un plan, avec une ligne droite indéfinie *FK* qui ne passe par aucun de ces points; soit imaginé le point de concours *K* des deux côtés *AK*, *BK*, se mouvoir le long de la droite *FK*, & soit proposé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours *M* des deux autres côtés *AM*, *BM*, prolongés lorsqu'il est necessaire de l'autre côté des points *A*, *B*. Fig. 206.

Sur *AB* comme corde, je décris de l'autre côté du point *M*, un arc de cercle capable d'un angle *BDA* qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés *KAM*, *KBM*; & ayant achevé le cercle entier dont

Nn

cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie FK tombe toute entiere au dehors de ce cercle, ou qu'elle passe au dedans, ou enfin qu'elle le touche; ce qui fait trois differens cas que j'explique en particulier.

Premier cas. Du centre C du cercle $BDAE$ je mene sur FK, la perpendiculaire CF qui le rencontre aux points D, E; & je fais passer par le point D (plus proche de la ligne FK que l'autre point E) les deux côtés DA, DB, des deux angles DAP, DBQ, égaux aux angles KAM, KBM, lesquels côtés étant prolongés vers D rencontrent la ligne FK aux points G, H. Or par la construction l'angle BDA plus les deux angles DAP, DBQ, vaut quatre droits; & comme le même angle BDA plus les deux angles DAB, DBA, vaut deux droits; il s'ensuit que les angles BAP, ABQ, vallent deux droits, & qu'ainsi les lignes AP, BQ, sont paralleles entr'elles. Cela posé.

Soit mené du point K sur les deux côtés AD, BD, les perpendiculaires KR, KS; & des points A, M, sur les deux autres côtés BQ, AP, les perpendiculaires AI, MP, qui rencontrent BQ, aux points I, Q. Soient les données $FE = a$, $FD = b$, $BI = c$, $AI = d$, $FG = g$, $FH = h$, $DG = m$, $DH = n$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$; & à cause des triangles rectangles semblables, GDF, GKR, on aura ces deux proportions: $GD\,(m) . GF\,(g) :: GK\,(z - g) . GR = \frac{gz - gg}{m}$. Et $GD\,(m) . DF\,(b) :: GK\,(z - g) . KR = \frac{bz - bg}{m}$. Or les triangles rectangles semblables GDF, EDA, donnent aussi $GD\,(m) . DF\,(b) :: ED\,(a - b) . AD = \frac{ab - bb}{m}$, & partant $AD + DG$ ou $AG = \frac{ab - bb + mm}{m}$, & $AG + GR$ ou $AR = \frac{ab - bb + mm + gz - gg}{m} = \frac{ab + gz}{m}$; parce $mm = bb + gg$ à cause du triangle rectangle DFG. Mais les triangles rectangles ARK, APM sont semblables,

car retranchant des angles égaux KAM, DAP le même angle KAP, les reſtes KAR, PAM, ſeront égaux ; & par conſequent $AR\left(\frac{ab+gz}{m}\right) . RK\left(\frac{bz-bg}{m}\right) :: AP(x) . PM(y)$, d'où l'on tire $z=\frac{aby+bgx}{bx-gy}$.

Maintenant les triangles rectangles ſemblables HDF, HKS donnent $HS=\frac{bz+bh}{n}$, $KS=\frac{bz+bh}{n}$; & les triangles rectangles ſemblables HFD, EBD donnent $DH(n) . DF(b) :: DE(a-b)$. $DB=\frac{ab-bb}{n}$. Et partant $BD+DH$ ou $BH=\frac{ab-bb+nn}{n}$, & $BH-HS$ ou $BS=\frac{ab-bb+nn-bz-hh}{n}=\frac{ab-bz}{n}$, parce que $nn=bb+hh$ à cauſe du triangle rectangle DFH. Or les triangles rectangles BSK, BQM, ſont ſemblables ; car retranchant des angles égaux DBQ, KBM, le même angle DBM, les reſtes KBS, MBQ, ſeront égaux ; & par conſequent $BS\left(\frac{ab-bz}{n}\right) . SK\left(\frac{bz+bh}{n}\right) :: BQ(x-c) . QM(y+d)$. D'où l'on tire $z=\frac{aby-bhx+bch+abd}{bx+hy-hc+hd}$.

Comparant cette derniere valeur de z avec la précedente, multipliant en croix, & faiſant pour abreger $GH(g+h)=f$, on arrive enfin en diviſant par abf à cette équation.

$$\begin{array}{llll} yy+dy & +\frac{b}{a}xx & -\frac{bc}{a}x & =0 \\ & -\frac{hc}{f} & -\frac{hd}{f} & \\ & +\frac{cgh}{af} & +\frac{dgh}{af} & \end{array}$$

dont le lieu que l'on pourra conſtruire ſelon l'article 324. (Liv. 7.) ſera une Ellipſe, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ ſera toûjours précedé dans ce premier cas du ſigne +, en quelque ſituation que ſe puiſſent trouver les points A, B, K.

Second cas. Aprés avoir nommé les lignes par les FIG. 207.

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raisonnemens; on arrivera à cette équation.

$$\begin{array}{llll} yy + dy & - \frac{b}{a}xx & + \frac{bc}{a}x & = 0 \\ - \frac{bc}{f} & & - \frac{bd}{f} & \\ - \frac{cgb}{af} & & - \frac{dgb}{af} & \end{array}$$

qui ne differe de la précedente que dans quelques signes, & dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.) sera toûjours deux Hyperboles opposées, parce le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toûjours précedé du signe — dans ce second cas.

Comme le plan xy ne se rencontre point dans les deux équations précedentes, & que l'angle APM est droit; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipse dans le premier cas, & des Hyperboles oppsées dans le second doit être parallele aux lignes AP, BQ; & qu'il a avec son parametre la même raison que $EF(a)$ à $FD(b)$, parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré xx exprime ce rapport.

Lorsque le point K en parcourant la ligne indéfinie KF arrive au point O où cette ligne rencontre la circonference, il est clair que les côtés AM, BM, qui décrivent par leur point de concours M l'Hyperbole BAM deviennent paralleles entr'eux; qu'ils se coupent vers le côté opposé, pendant que le point K parcourt la partie OL de la ligne KF renfermée dans la circonference; qu'ils deviennent encore paralleles, lorsque le point K tombe en L, aprés quoi ils se rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point M décrit l'Hyperbole BAM, pendant que le point K parcourt les deux parties indéfinies de la droite KF qui tombent de part & d'autre de la circonference; & qu'il décrit son opposée, pendant que le point K parcourt la partie OL renfermée dans la circonference.

FIG. 208. *Troisiéme cas.* Comme dans ce troisiéme cas la droite

indéfinie FK touche la circonference du cercle $BDAE$ en quelque point F, il eſt clair que le point D des deux autres cas ſe confond ici avec le point F, & qu'ainſi les triangles DFG, DFH, s'évanoüiſſent : c'eſt pourquoi on ſe ſervira en leur place des triangles DAE, DBE, de la maniere qui ſuit.

Soient les données $AE = a$, $EB = b$, $EF = m$, $AF = g$, $BF = h$, $BI = c$, $AI = d$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles rectangles FKR, EFA ſont ſemblables ; car l'angle KFR ou ſon oppoſé au ſommet TFA fait par la tangente FT & la corde FA, a pour meſure la moitié de l'arc AF; de même que l'angle FEA: & partant $FE(m).EA(a)::KF(z).FR = \frac{az}{m}$. Et $EF(m).FA(g)::FK(z).KR = \frac{gz}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables ARK, APM, donnent AR ou $AF + FR\left(\frac{az+gm}{m}\right).RK\left(\frac{gz}{m}\right)::AP(x).PM(y)$; d'où l'on tire $z = \frac{gmy}{gx-ay}$. On trouvera de même, à cauſe des triangles rectangles ſemblables EFB, FKS, que $FS = \frac{bz}{m}$, & $KS = \frac{hz}{m}$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables BSK, BQM, que BS ou $BF - FS\left(\frac{hm-bz}{m}\right).SK\left(\frac{hz}{m}\right)::BQ(x-c).QM(y+d)$; ce qui donne $z = \frac{hmy+hmd}{hx-ch+bd+by}$.

Comparant ces deux valeurs de z, multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy + dy - \frac{cgh}{ah+bg}y - \frac{dgh}{ah+bg}x = 0$, dont le lieu ſera toûjours une Parabole que l'on peut conſtruire ſelon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura ſon axe parallele aux droites AP, BQ.

Il eſt donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés M ſera toûjours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes ſera parallele aux lignes AP, BQ; & en particulier qu'il ſera une Ellipſe dans le premier

cas, deux Hyperboles opposées dans le second, & une Parabole dans le troisiéme ; & que dans le premier & le second cas, l'axe qui est parallele à *AP*, aura avec son parametre, la même raison que *EF* à *FD*. 2°. Que dans le premier & le troisiéme cas les deux points fixes *A*, *B*, autour desquels tournent les angles mobiles *KAM*, *KBM* tomberont toûjours du même côté de la ligne *FK*, aulieu que dans le second ils peuvent tomber non-seulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre ; parce que la circonference du cercle *ADBE* sur laquelle ils sont situés, est coupée alors en deux portions par la ligne *FK*.

REMARQUE I.

FIG. 206. 207. 208. 372. 1°. UNE ligne quelconque qui passe par l'un des points fixes *A* ou *B*, comme *AM*, étant donnée, on pourra toûjours trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre la Section qui est le lieu requis, en cette sorte. Ayant mené la droite *AK* qui fasse avec *AM* l'angle *MAK* égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe *A*, on menera du point *K* où elle rencontre la droite *FK*, par le point fixe *B*, l'angle *KBM* égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe *B* ; & le point *M* où le côté *BM* de cet angle rencontre la ligne *AM*, sera celui qu'on cherche. 2°. Lorsque le point *K* en parcourant la ligne *FK*, se trouve tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur la ligne *AB* ; il est visible que le point de concours *M* des deux côtés *AM*, *BM*, tombe alors sur le point *B*, & qu'ainsi le lieu des points *M* passe par le point fixe *B* ; on prouvera de même qu'il passe par le point *A*.

FIG. 206. Delà on voit que pour décrire la Section conique qui est le lieu des points cherchés *M*, sans avoir besoin des équations précedentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites *AP*, *AI* ; sur lesquelles ayant

trouvé, selon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipse ou les deux Hyperboles opposées (selon que FK tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui est parallele à AP soit à son conjugué, comme le quarré de EF est au quarré de DF. Si la Section est une Parabole (ce qui arrive lorsque la ligne KF touche le cercle BDA); on trouvera sur la ligne AI le point où elle rencontre la Section, & on décrira selon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui passe par ce point, & par les deux autres donnés A, B; & dont les diametres soient paralleles aux lignes AP, BQ.

* Art. 176. & 178.

Fig. 208.

REMARQUE II.

373. LORSQUE le point K en parcourant la ligne FK, est tellement situé que le côté AM de l'angle KAM tombe sur AB, il est clair non seulement que le point M tombe en B; mais aussi que le côté BM de l'angle KBM devient tangente * en B de la ligne courbe qui est le lieu du point M, puisque le point M peut être regardé alors comme étant infiniment-prés du point B. D'où il suit que pour mener une tangente de ce lieu en B, il n'y a qu'à mener par le point A une ligne droite AC qui fasse avec BA un angle BAC égal à l'angle donné KAM, & tirer ensuite une ligne BD, qui fasse avec BC l'angle CBD égal à l'autre angle donné KBM; car le côté BM de cet angle, qui devient BD, touchera la Section en B. Il en est de même de l'autre point fixe A.

Fig. 209.

* Art. 188.

Delà on tire encore une maniere trés-facile de décrire la Section conique qui est le lieu de tous les points M sans avoir besoin des équations précedentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe B une tangente BD, & par l'autre point fixe A une parallele AE à cette tangente, on trouvera * sur cette ligne le point E où elle rencontre la Section; & l'ayant divisée par le milieu en H on tirera BH, sur laquelle on cherchera *

Fig. 209.

* Art. 372.

* Art. 372.

aussi le point *G* où elle rencontre la Section. Cela fait,
* *Art.* 161. on décrira * du diametre *BG* & de l'ordonnée *HA* ou 161. *HE*, une Section conique qui sera celle qu'on demande. Car il est visible que la ligne *BG* qui divise par le milieu en *H* la ligne *AE* terminée par la Section & parallele à la tangente en *B*, en sera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne *AH*. Où l'on doit remarquer que lorsque le point *H* tombe entre les points *B*, *G*, la Section est une Ellipse; que lorsqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce sont deux Hyperboles opposées; & qu'enfin lorsque la ligne *BG* est infinie, la Section est une Parabole.

COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. CET exemple nous fournit le moyen de faire passer par quatre points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, une Section conique d'une espece déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipse, dont le grand axe soit à son parametre, en la raison donnée de *a* à *b*. Je forme le triangle *ABH*, en joignant trois des points donnés par des lignes droites; & du quatriéme point *M*, je fais passer par les points *A*, *B*, les angles *MAK*, *MBK*, égaux aux angles *GAH*, *RBA*, complements à deux droits des angles *HAB*, *HBA*. Je décris sur *AB* comme corde de l'autre côté du point *M* un arc de cercle *BDA* capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles *KAM*, *KBM*; & du centre *C* de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon *CF* soit au rayon *CD* du premier, comme $a+b$ est à $a-b$; & du point de concours *K* des deux côtés *AK*, *BK*, des angles *MAK*, *MBK*, je tire une tangente *KF* à ce dernier cercle. Maintenant je dis que si l'on fait mouvoir le point *K* le long de la droite indéfinie *FK*; le point de concours *M* des deux autres côtés *AM*, *BM*, prolongés lorsqu'il sera necessaire de l'autre côté des points *A*, *B*, décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on demande. Car il est évident selon

ce

ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points *M* sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme *EF* (*a*) à *DF* (*b*); & de plus qu'elle passera par les points *A*, *M*, *B*, *H*, puisque le point *K* étant en *G*, le côté *AM* tombera sur *AH*, & le côté *BM* sur *BR*.

2°. Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de a à b; la construction demeure la même, excepté que le rayon *CF* du cercle concentrique au cercle *BDAE*, doit être au rayon *CD*, comme $a - b$ est à $a + b$.

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés *A*, *B*, *H*, *M*. Ayant décrit comme dans le premier cas le cercle *BDAE*, on menera du point de concours *K* une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point *K*, l'autre point de concours *M* décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux differentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problême est possible; car lorsque le point *K* tombe au dedans du cercle qui a pour rayon *CF*, il est visible que le Problême est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372. ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

COROLLAIRE II.

375. On tire encore de cet exemple, une nouvelle maniere de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, *N*. Car ayant joint trois quelconques de ces points *A*, *B*, *H*, par des FIG. 211.

lignes droites, on fera passer par les autres points *M*, *N*, & par les deux points fixes *A*, *B*, les angles *MAK*, *NAS*, égaux chacun à l'angle *HAG* complement à deux droits de l'angle *HAB*, & les angles *MBK*, *NBS* égaux chacun à l'angle *ABR* complement à deux droits de l'angle *ABH*; & on tirera par les points de concours *K*, *S*, une ligne droite indéfinie *S*, *K*, sur laquelle faisant mouvoir le point *K*, il est clair que le point de concours *M* décrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande; puisqu'elle passera par les cinq points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, *N*.



LIVRE NEUVIE'ME.

De la construction des Egalités.

PROPOSITION I.

Problême.

376. CONSTRUIRE *toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnuë ne se trouve qu'au premier degré.*

Soit en premier lieu l'inconnuë x égale à une ou à plusieurs fractions simples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Ayant fait $c.\ b :: a.\ l$, il est clair que cette quatriéme proportionnelle $l = \frac{ab}{c}$; & si l'on fait $f.\ l :: e.\ m$, l'on aura $m = \frac{el}{f} = \frac{abe}{cf}$; & faisant enfin $g.\ m :: h.\ n$, il vient $n = \frac{mh}{g} = \frac{abeh}{cfg}$ en mettant pour m sa valeur $\frac{abe}{cf}$. De sorte qu'on aura l'inconnuë x égale à l, ou à m, ou à n, &c. selon que x sera égale à $\frac{ab}{c}$ ou à $\frac{abe}{cf}$, ou à $\frac{abeh}{cfg}$, &c. Or il est visible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il sera necessaire, on trouvera toûjours une ligne droite égale à une fraction simple donnée, tel que puisse être le nombre des dimensions de son numerateur. D'où l'on voit que l'on pourra toûjours trouver une ligne x égale à une quantité composée de plusieurs fractions simples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajoûter, ou retrancher selon qu'il sera marqué par les signes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x = a + \frac{ab}{c} + \frac{aab}{cf} - \frac{aacc}{bi}$, on ajoûtera les deux lignes $b = \frac{ab}{c}$ & $l = \frac{aab}{cf}$ à la ligne a pour en composer une seule, de laquelle ayant retran-

ché la ligne $m = \frac{aacc}{b^3}$, le reste sera la valeur cherchée de l'inconnuë x, c'est à dire qu'on aura $x = a + b + l - m$.

Soit en second lieu l'inconnuë x égale à une ou à plusieurs fractions composées, c'est à dire, dont les dénominateurs ayent plusieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enseigner ci-dessus, une ligne égale au dénominateur divisé par une ligne arbitraire lorsque chacun de ses termes, n'a que deux dimensions, par un plan lorsqu'ils en ont trois, par un solide lorsqu'ils en ont quatre, &c; ce qui réünira tous les termes du dénominateur en un seul, lequel étant substitué en leur place, changera la fraction composée en une ou en plusieurs simples selon que le numerateur est composé d'un ou de plusieurs termes; & ayant trouvé comme ci-dessus une ligne qui leur soit égale, elle sera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

On demande une ligne $x = \frac{age - bce}{bb + af}$, je cherche d'abord une ligne $m = f + \frac{bb}{a}$ c'est à dire égale au dénominateur $af + bb$ divisé par la ligne a; ce qui donne $bb + af = am$, & ayant trouvé ensuite une ligne $n = \frac{age - bce}{am} = \frac{ge}{m} - \frac{bce}{am}$; il est clair que la ligne cherchée $x = n$. De même si l'on demandoit une ligne $x = \frac{a^3b + aacc - abcf}{aaf + ccf + bff}$, on trouveroit une ligne $m = a + \frac{cc}{a} + \frac{bf}{a}$ c'est à dire égale au dénominateur $aaf + ccf + bff$ divisé par le plan af; ce qui donne $afm = aaf + ccf + bff$, & ensuite une autre ligne $= \frac{a^3b + aacc - abcf}{afm} = \frac{aab}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$. Il en est ainsi de tous les autres exemples que chacun se peut former à plaisir.

Il est inutile d'avertir que si l'on demandoit une ligne x égale à une ou à plusieurs fractions tant simples que

composées; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajoûter ensuite ou les retrancher les unes des autres, selon que les signes + ou − le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. IL est facile par le moyen de cette Proposition de trouver 1°. Une fraction simple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur où le numerateur a soit donné, égale à une ou à plusieurs fractions simples ou composées; car il n'y aura qu'à trouver une ligne x égale à la ligne a multipliée ou divisée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction $\frac{x}{a} = \frac{cc+ff}{af+cf} + \frac{aa}{gg}$, il est visible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{acc+aff}{af+cf} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan ax, dont l'un des côtés a est donné, égal à un ou à plusieurs plans si composés qu'ils puissent être; car il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces plans divisés par a. 3°. Un solide aax ou abx, dont deux des côtés a, a, ou a, b, sont donnés, égal à plusieurs solides; puisqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces solides divisés par le quarré aa ou par le plan ab. 4°. Un sursolide a^3x ou $abcx$ dont trois côtés a, a, a, ou a, b, c, sont donnés, égal à plusieurs sursolides; puisqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces sursolides divisés par le cube a^3 ou par le solide abc. Et il en est de même de plusieurs produits de cinq dimensions, de six &c. que l'on peut toûjours reduire en un seul dont tous les côtés, excepté un, soient donnés.

COROLLAIRE II.

378. DE LA on voit que pour trouver un quarré égal à plusieurs plans donnés, il les faut réünir

tous en un ſeul, & trouver enſuite une moyenne proportionnelle entre ſes deux côtés ; car il eſt clair qu'elle ſera le côté du quarré qu'on demande. Qu'il faille, par exemple, trouver un quarré $xx = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$ (les lignes a, b, c, e, f, h, s, ſont données), je cherche une ligne $m = \frac{ss}{e} - \frac{cce - ebb}{bb + af}$ pour avoir un plan $em = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$, & ayant trouvé une moyenne proportionnelle x entre les deux côtés e, m, du plan em, il eſt clair que $xx = em = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$.

Pour trouver une ligne x dont le quarré x^4 ſoit égal à pluſieurs ſurſolides donnés ; je cherche, comme ci-deſſus, un quarré zz égal à tous les ſurſolides donnés diviſés par le quarré aa donné ou pris à volonté. Je prends enſuite une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes a & z, & je dis qu'elle ſera celle qu'on demande ; car $xx = az$, &, en quarrant chaque membre, $x^4 = aazz$, c'eſt à dire x^4 égal à tous les ſurſolides donnés.

REMARQUE.

379. QUOIQUE la methode que l'on vient d'expliquer ſoit generale pour tous les cas poſſibles, il ne s'enſuit pas neanmoins qu'elle ſoit toûjours la plus ſimple. C'eſt pourquoi je vais donner ici des exemples particuliers que l'on reſoud d'une maniere plus aiſée en s'écartant un peu de la methode generale, & qui pourront ſervir de methodes pour tous les cas ſemblables.

1°. Soit $x = \frac{abcc - aabb}{abc + c^3}$. Je cherche d'abord une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & ſubſtituant à la place de ab ſa valeur cm, je trouve $x = \frac{c^3m - ccmm}{ccm + c^3} = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où je connois qu'en faiſant $c + m . c - m :: m . n$, cette quatriéme proportionnelle $n = x$. Il eſt donc viſible qu'on n'a eu beſoin que de deux proportions pour trouver la valeur de x, au lieu

que si l'on tente la methode generale, on trouvera qu'il en faut au moins trois.

2°. Soit $x = \sqrt{aa + bb}$. Je fais un triangle rectangle, dont l'un des côtés $= a$, & l'autre $= b$; & son hypothenuse sera la valeur de x. S'il falloit trouver une ligne $x = \sqrt{aa - bb}$, il n'y auroit qu'à trouver une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes $a + b$ & $a - b$; car son quarré xx doit être égal au produit des extrêmes $aa - bb$. Ou bien je fais un triangle rectangle dont l'hypothenuse $= a$, & l'un des côtés $= b$; l'autre côté sera la valeur de x.

3°. Soit $xx = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$. Je prends l'hypothenuse m d'un triangle rectangle dont l'un des côtés $= s$, & l'autre $= 2e$, & ayant trouvé une autre ligne $n = \frac{2ce}{a}$, j'ai $xx = mm - nn$ & $x = \sqrt{mm - nn}$ que je resous comme je viens de faire $x = \sqrt{aa - bb}$ dans l'exemple precedent.

4°. Soit enfin $xx = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$. Je prends une moyenne proportionnelle entre les côtés a, f, du plan af, pour avoir un quarré $ll = af$, je trouve ensuite un quarré $mm = bb + ll$, & un autre quarré $nn = cc + bb$ par le moyen de deux triangles rectangles, comme dans le second exemple, & j'ay par la substitution $xx = ss - \frac{eenn}{mm}$; & trouvant enfin une ligne $g = \frac{en}{m}$, il vient $x = \sqrt{ss - gg}$ que l'on resoud comme ci-dessus.

PROPOSITION II.

Problême.

380. TROUVER *les racines de toutes sortes d'Egalités du second degré.*

Toutes les Egalités du second degré se peuvent ré-

duire à l'une de ces deux formes, $xx \mp ax - bb = o$, ou
* *Art.* 376. $xx \mp ax + bb = o$; en trouvant une ligne a* égale à toutes les quantités connuës qui multiplient l'inconnuë
* *Art.* 378. x, & un quarré bb* égal à tous les plans entierement connus. Cela posé.

FIG. 212. 1°. Soit $xx + ax - bb = o$. Je forme un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre côté $AB = b$; & ayant mené l'hypothenuse BC prolongée au delà de C, je décris du centre C & du rayon CA, un cercle qui coupe BC en deux points E, D. Je dis que les droites BD, BE, sont les deux racines de l'égalité proposée $xx \mp ax - bb$: sçavoir BE la racine vraie, & BD la fausse de l'égalité $xx + ax - bb = o$, & au contraire BD la vraie & BE la fausse de l'égalité $xx - ax - bb = o$.

Car faisant $BE = x$, on aura BD ou $BE + ED = a + x$; & si l'on fait $BD = -x$, on trouvera BE ou $BD - ED = -x - a$. Donc en l'un & l'autre cas $DB \times BF = xx + ax = \overline{AB}^2 (bb)$ par la proprieté du cercle, c'est à dire $xx + ax - bb = o$. Au contraire si l'on fait $BD = x$ ou $BE = -x$, on trouvera $DB \times BE = xx - ax = bb$ ou $xx - ax - bb = o$.

FIG. 213. 2°. Soit $xx \mp ax + bb = o$. Je forme comme dans le premier cas, un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre $AB = b$; & ayant mené une droite indefinie BD parallele à AC, je décris du centre C & du rayon CA un arc de cercle qui coupe la ligne BD aux points E, D. Je dis que les droites BE, BD, sont les racines de l'égalité proposée $xx \mp ax + bb = o$; sçavoir les deux vraies de l'égalité $xx - ax + bb = o$, & les deux fausses de l'égalité $xx + ax + bb = o$.

Car achevant la demi-circonference $AEDH$, & menant les paralleles EF, DG à AB; on aura en faisant BE ou $AF = x$, le rectangle $AF \times FH = ax - xx = \overline{FE}^2 (bb)$ par la proprieté du cercle. De même si l'on fait BD ou $AG = x$, on aura $AG \times GH = ax - xx = \overline{GD}^2 (bb)$: c'est à dire en l'un & l'autre cas

cas $xx - ax + bb = o$. Si l'on veut que BE ou $AF = -x$, & BD ou $AG = -x$, on trouvera $AF \times FH$ & $AG \times GH = -xx - ax = \overline{FE}^2$ ou $\overline{GD}^2$ (bb) c'est à dire $xx + ax + bb = o$.

Si le cercle qui a pour centre le point C, & pour rayon la droite CA, ne coupe ni ne touche la parallele BD, (ce qui arrive toûjours lorsque AB surpasse CA); les racines de l'égalité seront toutes deux imaginaires: mais s'il la touche en un point, les deux racines BE, BD, deviennent égales chacune au rayon CA.

REMARQUE.

381. LORSQUE dans une égalité l'inconnuë ne se rencontre qu'au quatriéme & au second degré, on peut toûjours réduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au second degré: de maniere que ces sortes d'égalités ne passent que pour être du second degré.

Soit par exemple $z^4 - aazz - aabb = o$. Je suppose une inconnuë x qui soit telle que son rectangle par la donnée a soit égal au quarré zz; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de zz cette valeur ax, & à la place de z^4 son quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aazz - aabb = o$ en cette autre $xx - ax - bb = o$, où l'inconnuë x ne monte qu'au second degré. J'en cherche les racines x, comme l'on vient d'enseigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée a & les valeurs de ses racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnuë z: ce qui est évident, puisque $zz = ax$. FIG. 214.

PROPOSITION III.

Problême.

382. TROUVER *par une autre voye les racines des égalités du second degré, sans qu'il soit necessaire de changer leur dernier terme en un quarré.*

FIG. 215. 1°. Soit $xx \mp ax - bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b-c$ (je ſuppoſe ici que b ſurpaſſe c) ; on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b-c$: & ayant prolongé AD en F en ſorte que $DF = c$, on décrira de ſon centre C, & du rayon CF, un autre cercle concentrique qui coupe aux points F, E, G, H, les cordes AD, AB prolongées. Je dis que AG eſt la vraie racine, & AH la fauſſe de l'égalité $xx + ax - bc = o$; & qu'au contraire AG eſt la fauſſe, & AH eſt la vraie racine de $xx - ax - bc = o$.

Car AF ou $AD + DF = b$, DF ou $AE = c$, & faiſant AG ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la proprieté du cercle $EGFH$, le rectangle $EA \times AF$ $(bc) = GA \times AH$ $(xx + ax)$. Si l'on fait à preſent $AH = -x$, on aura AG ou BH ou $AH - AB = -x - a$, & par conſequent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc ſoit que l'on faſſe $AG = x$ ou $AH = -x$, on trouvera toûjours $xx + ax - bc = o$. On prouvera de même que AG eſt la racine fauſſe, & AH la vraie de l'égalité $xx - ax - bc = o$.

FIG. 216. 2°. Soit $xx \mp ax + bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b+c$, on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b+c$: & ayant pris ſur AD la partie $DF = c$, on décrira de ſon centre C & du rayon CF un autre cercle concentrique qui coupera les cordes AD, AB, aux points F, E, G, H. Je dis que AG & AH ſont les deux racines vraies de l'égalité $xx - ax + bc = o$, & les deux fauſſes de $xx + ax + bc = o$. Cela ſe démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon CF ne touchoit ni ne rencontroit la ligne AB en aucun point, il s'enſuivroit que les deux racines de l'égalité ſeroient imaginaires.

AVERTISSEMENT.

Tout l'artifice dont je me ſers pour conſtruire les égalités qui n'ont qu'une inconnuë, ou pour en trouver les racines, conſiſte à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnuë; en ſorte qu'on en puiſſe tirer pluſieurs équations qui renferment chacune les deux inconnuës & qui ſoient telles que deux quelconques de ces équations renferment enſemble toutes les quantités connuës de la propoſée; car autrement en faiſant évanoüir l'inconnuë nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité propoſée. Je choiſis enſuite entre ces équations deux des plus ſimples, & en ayant conſtruit ſeparément les lieux, leurs points d'interſections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnuë; car il faut que les lieux que l'on tire de la propoſée, ſoient les plus ſimples qu'il ſe puiſſe: par exemple, ſi l'égalité eſt du quatriéme degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne paſſe point le ſecond degré; que parmi ces lieux il y ait toûjours un cercle comme étant le plus ſimple, & auſſi une Parabole, une Hyperbole équilatere &c. Or c'eſt ce que j'ai tâché d'executer dans les Lemmes & les Propoſitions qui ſuivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.

383. SOIT propoſée l'égalité $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, dans laquelle x eſt l'inconnuë, & $a, b, c, d, f,$ ſont les données; & ſoit ſuppoſée une autre inconnuë y telle que ſon rectangle par la connuë a, ſoit égal au rectangle de $x + b$ par x. Ce qui donne les équations ſuivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$; &

mettant à la place de $x^4 + 2bx^3$, sa valeur $aayy - bbxx$ dans l'égalité proposée x^4 &c. on la changera en cette seconde équation.

2°. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la premiere équation, 1°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2°. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrive à ces trois differentes équations.

3°. $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3x}{aa} + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$.

4°. $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0$.

5°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$. Si l'on retranche de cette cinquiéme équation, la premiere $xx + bx - ay = 0$, & qu'ensuite on la lui ajoûte, on aura ces deux autres.

6°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

7°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

Maintenant si l'on prend pour les inconnuës x & y deux lignes droites AP, PM, qui fassent entr'elles un angle quelconque APM; il est évident que le lieu de
* Art. 310. la premiere équation est * une Parabole: que celui de la seconde peut-être une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que bb est égal, moindre, ou plus grand que ac; que celui de la troisiéme est une Ellipse,
* Art. 328. & 329. qui devient un cercle * lorsque $c = a$ & que l'angle APM est droit: que celui de la quatriéme est une Hy-
* Art. 335. & 336. perbole, qui devient équilatere * lorsque $b = a$: que celui de la cinquiéme est encore une Parabole: que celui de la sixiéme est une Hyperbole équilatere: & enfin que le lieu de la septiéme est un cercle, lorsque l'angle APM est droit.

REMARQUE I.

384. S'IL y avoit $-2bx^3$ dans l'égalité proposée au lieu de $+2bx^3$, il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes ou b se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'égalité proposée par rapport aux lettres c, d, f, qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation sera une Parabole, celui de la sixiéme une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la derniere toûjours un cercle lorsque l'angle APM est droit.

REMARQUE II.

385. ON a choisi pour premiere équation $xx+bx=ay$, plûtôt que $xx-bx=ay$ ou simplement $xx=ay$; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée x^4+2bx^3 &c, & qu'ainsi on peut les faire évanoüir tout d'un coup Ce qui donne une nouvelle équation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en differentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan xy; & entre lesquels le lieu de la derniere équation, est toûjours un cercle, en supposant que les inconnuës x & y fassent entr'elles un angle droit.

PROPOSITION IV.

Problême.

386. TROUVER *les racines de l'égalité proposée* $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, *par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.*

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnuës & indéterminées x & y, les deux lignes droites AP, PM, qui fassent entr'elles
*Art. 310. un angle droit APM; je construis * d'abord la Parabole qui est le lieu de la premiere équation du Lemme, & ensuite le cercle qui est le lieu de la septiéme : & leurs interfeċtions me servent à découvrir les differentes valeurs de l'inconnuë x qui seront les racines de l'égalité proposée. Cela se fait en cette sorte.

Ayant pris sur la ligne AP prolongée de l'autre côté de A la partie $AD = \frac{1}{2}b$, on menera par le point D une parallele à PM, sur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté opposé à PM; & on décrira de l'axe CD qui ait son origine en C, & dont le parametre soit égal à la donnée a, une Parabole MCM. Cela fait on menera par le point fixe A une parallele AQ à PM, sur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = \mp g$ pour abreger, on tirera parallelement à AP la droite $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bg}{a}$ sçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$ c'est à dire lorsque la valeur de AB est positive, & $+\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = -g$; en observant de prendre ou mener ces deux lignes AB, BE, du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. Nommant enfin EA, m; on décrira du centre E, & du rayon $EM = \sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points M où il coupe la Parabole des perpendiculaires MP sur la ligne AP: les par-

ties AP de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, sçavoir les vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & les fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car prolongeant MQ parallele à AP, & qui rencontre l'axe CG au point L, on aura ML ou $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$, CL ou $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; & par la proprieté de la Parabole $\overline{ML}^2 = CL \times a$, c'est à dire $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ou $xx + bx = ay$ qui est la premiere équation du Lemme. Maintenant si l'on prolonge EB jusqu'à ce qu'elle rencontre PM en R, & qu'on tire le rayon EM, on aura à cause du triangle rectangle ERM le quarré $\overline{EM}^2 = \overline{ER}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{EB}^2 + 2EB \times BR + \overline{BR}^2 + \overline{PM}^2 - 2AB \times PM + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 + af$ par la construction; c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés $\overline{EB}^2$, $\overline{BA}^2$, & mettant pour $2AB$ sa valeur $a + \frac{bb}{a} - c$, & pour $2BE$ sa valeur $\frac{2bg}{a} - d$ ou $b + \frac{b^3}{aa} - \frac{bc}{a} - d$, & pour BR ou AP & PM leurs valeurs x & y, la septiéme équation $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^3}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, dans laquelle si l'on met à la place de y sa valeur $\frac{xx+bx}{a}$ trouvée par la premiere équation, & à la place de yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'équation même proposée $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$. D'où l'on voit que la ligne AP exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on observe de prendre $-x$ pour AP & $-y$ pour PM, lorsque ces lignes tombent du côté opposé où on les a supposées en faisant la construction; on trouvera toûjours par la proprieté de la Parabole la premiere équation, & par la proprieté du cercle la septiéme. Donc &c.

COROLLAIRE I.

387. Il eſt viſible qu'on rendra la conſtruction précedente generale pour toutes les égalités du troiſiéme & du quatriéme degré, & qu'on y employera toûjours une Parabole qui ait pour le parametre de ſon axe une ligne donnée a; ſi l'on obſerve 1°. De multiplier par ſa racine x l'égalité lorſqu'elle n'eſt que du troiſiéme degré; & de prendre une ligne * $2b$ égale à toutes celles qui multiplient x^3, un plan * ac égal à ceux qui multiplient xx, un ſolide aad égal aux ſolides qui multiplient x, & enfin un ſurſolide a^3f égal aux termes entierement connus de l'égalité donnée. 2°. De changer dans les valeurs des lignes AD, DC, AB, BE, EM, qui déterminent la conſtruction de la Parabole & du cercle, les ſignes des termes où b ſe rencontre avec une dimenſion impaire s'il y a $-2bx^3$ dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit $+2bx^3$ dans celle du Problême; & d'effacer tous les termes où b ſe trouve ſi le terme $2bx^3$ manque, parce qu'alors $b=0$; comme auſſi de faire la même choſe à l'égard des termes où c, d, f, ſe rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorſqu'elles ſont poſitives, & du coté oppoſé lorſqu'elles ſont negatives. On aura donc $AD = \pm \frac{1}{2}b$, ſçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $-2bx^3$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, ſçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorſque c'eſt $-acxx$; $BE = \pm\frac{bg}{a} \mp \frac{1}{2}d$, ſçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = +g$, & qu'il y a $+2bx^3$, ou bien lorſque $AB = -g$, & qu'il y a $-2bx^3$; & au contraire $+\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = +g$ & qu'il y a $-2bx^3$, ou bien lorſque $AB = -g$ & qu'il y a $+2bx^3$ (c'eſt à dire $-\frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs de AB & AD ſont l'une poſitive & l'autre negative, & $+\frac{bg}{a}$ lorſque ces valeurs ſont toutes deux ou poſitives

* Art. 376.
* Art. 377.

ves ou negatives); comme aussi $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $-\frac{1}{2}d$ lorsque c'est $+aadx$: & enfin $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ lorsqu'il y a $-a^3f$, & $-af$ lorsque c'est $+a^3f$. D'où l'on tire cette construction geometrique qui est generale pour tous les cas.

Une Parabole MCM qui a pour axe la ligne CG dont le parametre est égal à la ligne a, étant donnée, & ayant reduit l'égalité proposée sous cette forme $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = 0$; on menera une ligne AB parallele à l'axe CG qui en soit distante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorsqu'il y a $+2bx^3$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorsqu'il y a $-2bx^3$. On tirera par le point A où la ligne AB rencontre la Parabole, une perpendiculaire AD sur l'axe CG; & on prendra sur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toûjours du côté opposé à son origine C, & la partie [illegible] $= \frac{1}{2}C$ vers son origine C lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$. On menera ensuite par les points determinés A, F, une ligne droite indéfinie AF, & par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre AF en H; & on prendra sur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorsqu'il y a $-aadx$, & du côté gauche lorsqu'il y a $+aadx$. Cela fait, on décrira un cercle du centre E, & du rayon $EM = AE$, lorsque le terme a^3f manque dans l'égalité donnée, c'est à dire, lorsqu'elle n'est que du troisiéme degré: mais lorsqu'elle est du quatriéme, on prendra (aprés avoir nommé AE, m;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ s'il y a $-a^3f$, & $-af$ s'il y a $+a^3f$. Enfin des points M où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires MQ sur la ligne AB; elles seront les racines de l'égalité donnée; sçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. FIG. 217.

Car prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AB au point B, on a par la construction BK ou

$AD = \pm \frac{1}{2}b$, ſçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorſque c'eſt $-2bx^3$; & par la proprieté de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc DG ou $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a}$, & DK ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, ſçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $-acxx$; & l'on doit obſerver que le point B tombe du côté de PM lorſque $AB = +g$, c'eſt à dire lorſque ſa valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative. Or à cauſe des triangles ſemblables ADF, ABH, on aura $DF\,(\frac{1}{2}a) . DA\,(\pm\frac{1}{2}b) :: AB\,(\mp g)$. $BH = \pm\frac{bg}{a}$, ſçavoir $+\frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs de AD & de AB ſont toutes deux poſitives ou negatives, & $-\frac{bg}{a}$ lorſque l'une d'elles eſt poſitive & l'autre negative. Et partant $BE = \pm\frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$, ſçavoir $-\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $-aadx$, & $+\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $+aadx$; & l'on doit encore obſerver que le point E tombera du côté de PM lorſque la valeur de BE eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative. D'où il eſt évident que par le moyen de cette conſtruction on déterminera dans tous les cas poſſibles toûjours comme il eſt requis, le centre E du cercle.

Si le ſecond terme $2bx^3$ manquoit dans l'égalité donnée, il eſt clair que les lignes AB, AF, tomberoient ſur l'axe CG, en ſorte que les points A, D, ſe confondroient avec l'origine C; puiſque $b = 0$. Et par conſequent le point G tomberoit ſur le point F, & les points FIG. 218. H, B, ſur le point K: ce qui rend la conſtruction generale beaucoup plus ſimple. Car il ne faudroit alors que prendre ſur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toûjours vers le dedans de la Parabole, & la partie $FK = \frac{1}{2}c$ vers l'origine C lorſqu'il y a $+acxx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorſqu'il y a $+aadx$, & du côté droit lorſqu'il y a $-aadx$; & achever le reſte comme dans la conſtruction generale, en obſervant qu'ici $EC = m$.

De même si le terme $acxx$ manque, le point K tombera sur le point G; & si c'est le terme $aadx$, le centre E du cercle tombera en H. FIG. 217.

COROLLAIRE II.

388. On peut encore trouver une construction plus simple pour les égalités du troisiéme degré qui ont un second terme, en les multipliant par l'inconnuë plus ou moins la quantité connuë du second terme, sçavoir plus cette quantité quand le second terme est affecté du signe $-$; & moins cette quantité lorsqu'il y a le signe $+$; ce qui donne une équation du quatriéme degré où le second terme est évanoüi. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troisiéme degré, $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatriéme degré,

$$\begin{array}{l} x^4 + apxx + aaqx + aabq = 0, \\ \quad\;\; - bbxx + abpx \end{array}$$

dans laquelle le second terme est évanoüi; je me sers à present de la construction que l'on vient de donner pour ces sortes d'égalités où le second terme manque, & j'ai

$$CK\left(\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}c\right) = \tfrac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \tfrac{1}{2}p,\ KE\left(\tfrac{1}{2}d\right) = \tfrac{1}{2}q + \frac{bp}{2a},$$

& le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette construction.

Ayant mené une parallele à l'axe CD qui en soit distante vers le côté gauche d'une ligne égale à b, & qui rencontre la Parabole au point A, je tire par l'origine C de l'axe la droite CA, sur laquelle j'éleve par son point de milieu O une perpendiculaire indéfinie OG qui rencontre l'axe au point G. Je prends sur l'axe vers son origine C la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne OG au point H, je prends sur cette perpendiculaire prolongée du côté de H la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre E & du rayon EA un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points M, d'où ayant abaissé sur l'axe des perpendiculaires MQ; celles qui seront FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines ; & celles qui seront à gauche, les fausses de l'égalité proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$.

Car ayant mené les perpendiculaires AD, OL, sur l'axe ; on aura par la construction $AD = b$, & par la proprieté de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puisque CA est divisée par le milieu en O, les triangles semblables CAD, COL, donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cause des triangles rectangles semblables CLO, OLG, on aura $CL\ (\frac{bb}{2a}) . LO\ (\frac{1}{2}b) :: LO\ (\frac{1}{2}b) . LG = \frac{1}{2}a$, & par consequent CK ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cause des triangles semblables GLO, GKH, on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il est prescrit dans la construction lorsqu'il y a $+ aadx$. Le point E est donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ses intersections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 + apxx$ &c. Or comme les racines de cette égalité sont celles de la proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$, avec une fausse $AD\ (b)$; il s'ensuit que ce cercle doit passer par le point A. Donc &c.

On peut encore s'assurer par le calcul que EA est le rayon du cercle cherché. Car menant EB parallele à l'axe, on aura (à cause des triangles rectangles EBA, EKC) les quarrés des hypothenuses $\overline{EA}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2$ & $\overline{EC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KE}^2$ & par consequent il s'agit de prouver que $\overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 - bq$, puisqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'est ce qui doit arriver, si le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette construction generale, il faut ob-

ſerver, 1°. De mener du côté gauche de l'axe la paralle- le qui en eſt diſtante d'une ligne égale à b, lorſqu'il y a $-bxx$ dans l'égalité propoſée, & du côté droit lorſqu'il y a $+bxx$. 2°. De prendre ſur l'axe $GK = \frac{1}{2}p$ du côté de ſon origine C lorſqu'il y a $+apx$, & du côté op- poſé lorſqu'il y a $-apx$. 3°. De prendre $HE = \frac{1}{2}q$ du côté gauche lorſqu'il y a $+aaq$, & du côté droit lorſ- qu'il y a $-aaq$. Tout cela eſt trop évident pour m'ar- rêter à le démontrer en détail.

REMARQUE I.

389. Il eſt à propos de remarquer, 1°. Que ſi le cer- cle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'enſuivra que l'égalité propoſée n'aura que deux raci- nes réelles lorſqu'elle eſt du quatriéme degré, & qu'une ſeule lorſqu'elle eſt du troiſiéme, & les deux autres ima- ginaires: comme dans la figure 219. où le cercle ne cou- pe la Parabole qu'en deux points A, M; l'égalité $x^4 + apxx - bbxx$ &c. n'a que deux racines réelles AD, MQ, qui ſont toutes deux fauſſes, parce qu'elles tom- bent du côté gauche de l'axe. 2°. Que ſi le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorſque l'égalité eſt du troiſiéme degré comme l'on voit par les conſtructions précedén- tes) les quatre racines ſeroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité propoſée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut conſiderer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il la coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui ſont regardés comme réünis dans le point touchant: mais alors l'égalité propoſée ſe pourroit abaiſſer à une du ſecond degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de ſorte qu'on n'auroit point beſoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. Si l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le second terme manque, & qui a toutes ses racines réelles, la somme des vraies est égale à la somme des fausses; on verra naître ce Theorême.

FIG. 118. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points M d'où l'on abaisse des perpendiculaires MQ sur l'axe CF: je dis que la somme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, sera égale à la somme de celles qui tombent du côté gauche.

Car si l'on prend vers le dedans de la Parabole sur l'axe depuis son origine C la partie CF égale la moitié de son parametre que j'appelle a, & qu'ayant tiré du centre E du cercle la perpendiculaire EK sur l'axe, on fasse $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $\overline{EC}^2 - \overline{EM}^2 = af$; il est clair

* Art. 387. par la construction qui est à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires MQ seront les racines de cette égalité $x^4 - acxx + aadx + a^3f = 0$ dans laquelle le second terme manque; sçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. Donc &c.

Si le cercle passoit par l'origine C de l'axe, il est visible que l'une des perpendiculaires MQ deviendroit nulle ou zero; & qu'ainsi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puis-

* Art. 389. que (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se réünissent au point touchant.

REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui ayent plus de trois dimensions ; puisque le solide, qui est la quantité la plus composée, n'en a que trois ; on pourra diviser, si l'on veut, tous les termes d'une égalité proposée qui passe le troisiéme degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puissance moindre d'une unité que chacun de ses termes n'a de dimensions : ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ses termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatriéme degré $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$; je la divise par a^3, ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$, dont chaque terme n'a qu'une dimension, & n'exprime par consequent que des lignes droites. On choisit ordinairement la ligne qui se trouve repetée le plus souvent dans tous les termes de l'équation proposée, comme est ici la ligne a, & même quelquefois on la sousentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle divise : ainsi en faisant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = o$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{aa} - f = o$. Il en est de même des égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, &c.

REMARQUE IV.

392. SI aprés avoir construit le cercle qui est le lieu de la derniere équation du Lemme, on construit une Section conique qui soit le lieu de telle autre de ses équations qu'on voudra ; ces deux lieux détermineront par leurs interfections les racines de l'égalité proposée ; dont la raison est que faisant évanoüir par le moyen de leurs équations l'inconnuë y, on retrouve l'égalité même proposée.

De là il eſt évident qu'on peut conſtruire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la ſixiéme équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à AP eſt à ſon parametre comme a eſt à c, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallele à AP eſt à ſon parametre comme aa eſt à bb, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation. Or comme la ligne a, dont on ſe ſert pour reduire ſous l'expreſſion ac toutes les quantités qui multiplient xx, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x, & enfin ſous l'expreſſion a^3f les quantités entierement connuës, eſt arbitraire ; il s'enſuit qu'en prenant pour cette ligne a une infinité de differentes grandeurs, on pourra conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipſes, ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes differentes entr'elles.

On a vû dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire a le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en ſe ſervant de la premiere & de la ſeptiéme équation conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée : & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne a d'une certaine maniere, on peut conſtruire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole ſemblable à une Ellipſe ou à une Hyperbole donnée. Car la raiſon de ſes axes étant donnée par la ſuppoſition, la raiſon de l'axe parallele à AP avec ſon parametre ſera auſſi donnée. Si donc l'on nomme cette raiſon donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorſqu'il s'agit de l'Ellipſe $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, & partant $aa = \frac{acm}{n}$; d'où il ſuit que ſi l'on prend pour l'unité arbitraire a, la racine d'un quarré aa égal * à une quantité connuë ac qui multiplie xx dans l'égalité donnée

* Art. 378.

donnée, & eſt multipliée par $\frac{m}{n}$, on conſtruira l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à *AP*, ſera à ſon parametre comme *m* eſt à *n*, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{c}{a}$. Mais lorſqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$, & partant $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que ſi l'on prend pour l'unité *a* cette valeur, & qu'on conſtruiſe l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation, l'axe parallele à *AP* de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la quatriéme, ſera à ſon parametre comme *m* eſt à *n*, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

REMARQUE V.

393. LA ligne *a* qui fait l'office de l'unité, & qui eſt arbitraire, ſuffit comme l'on vient de voir pour conſtruire l'égalité propoſée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole ſemblable à une donnée. Mais lorſqu'il eſt queſtion de la conſtruire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole donnée, une ſeule ligne arbitraire ne ſuffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité propoſée, afin de pouvoir les déterminer enſuite de maniere que la Section donnée ſerve. C'eſt ce que l'on va executer dans le Lemme ſuivant.

LEMME FONDAMENTAL

Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, avec un cercle & une Ellipſe, ou une Hyperbole donnée.

394. SOIT l'égalité du quatriéme degré $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, dans laquelle les lettres *a*, *b*, *c*, *d*,

marquent des lignes données, & la lettre z exprime les racines inconnuës de l'égalité. Je prends une autre inconnuë $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre f marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de z, zz, & z^4 leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aaxx}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité précedente, je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = o$; je prends une troisiéme inconnuë y telle qu'étant multipliée par f son produit fy soit égal au quarré xx de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1e. $xx - fy = o$; & substituant à la place de xx, & de x^4 leurs valeurs fy & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$ &c, j'ai pour seconde équation.

2e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, laquelle étant ajoûtée à la premiere, donne pour troisiéme équation.

3e. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le
* Art. 324. lieu est * un cercle lorsque les inconnuës & indéterminées x & y font entr'elles un angle droit. Je multiplie
& 329. la premiere équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle g exprime une ligne telle qu'on veut de même que f, & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = o$; Et ajoûtant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatriéme & la cinquiéme équation.

4e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont
* Art. 324. le lieu est * une Ellipse.

5e. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont
* Art. 332. le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles opposées.

REMARQUE.

395. S'il arrive que quelques termes de l'égalité proposée ayent des signes differens de celle-ci, ou qu'ils

manquent; les lieux de ces cinq équations seront toûjours neanmoins des Sections coniques de même nom : c'est à dire que les lieux de la premiere & de la seconde équation seront toûjours des Paraboles, celui de la troisiéme, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problême.

396. CONSTRUIRE l'*égalité du quatriéme degré* $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, *avec un cercle donné & une Hyperbole semblable à une donnée; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.*

Je construis separément* les lieux de la troisiéme & de la cinquiéme équation, en prenant pour les inconnuës & indéterminées x & y les mêmes lignes AP, PM, qui fassent entr'elles un angle droit APM; & les intersections de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnuë z, de la maniere qui suit. * *Art.* 324. & 332. FIG. 220. & 221.

Soit menée par le point A origine des x, la ligne $AD = \frac{af - bf}{2a}$ parallele à PM, & du même côté lorsque a surpasse b, & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie DG parallele à AP, soient prises sur cette ligne du côté de PM la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & soit décrit du centre C & du rayon CF ou $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + 2f}{2a}$ parallele à PM & du côté opposé, soit tirée la droite indéfinie HK parallele à AP, sur laquelle soient prises la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point I les parties IK, IL, égales chacune à $\frac{f}{2g}\sqrt{cc - bg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g}\sqrt{bg - 4dg - cc}$ (on a

pris pour abreger $h = \frac{\overline{b+g}^2}{4}$). Soit enfin décrite de l'axe LK (qui doit être le premier lorsque $cc + 4dg$ est plus grand que hg, & le second lorsqu'il est moindre) qui soit à son parametre KO comme a est à g, une Hyperbole ou les Hyperboles opposées qui rencontrent le cercle en des points M, M, d'où soient abaissées des perpendiculaires MP, MP, sur la ligne AP. Je dis que les parties AP, AP, de cette ligne seront les racines de l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$; en observant qu'elles sont vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car on trouvera par la proprieté du cercle la troisiéme équation ; & par la proprieté de l'Hyperbole, la cinquiéme ; & ôtant la troisiéme de la cinquiéme, on aura $\frac{gf}{a}y + fy - \frac{g}{a}xx - xx = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de y cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de yy son quarré $\frac{x^4}{ff}$, on trouvera l'égalité x^4 &c. Mais ayant les valeurs de x, on a celles de z; puisque $z = \frac{ax}{f}$.

Maintenant pour satisfaire à la premiere demande du Problême, je nomme le rayon du cercle donné CF, r; & j'ai par consequent $r = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$; d'où il suit que si l'on prend $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}}$, le rayon CF ou CG du cercle qui est le lieu de la troisiéme équation, sera égal à la donnée r. Il reste à faire que l'Hyperbole soit semblable à une donnée, c'est à dire, que son premier ou second axe LK soit à son parametre KO en raison donnée de m à n; & il est visible qu'il ne faut pour cela que prendre $g = \frac{an}{m}$, puisque $LK . KO :: a . g :: m . n$.

Enfin pour faire en sorte que l'Hyperbole soit donnée, ou, ce qui est la même chose que son premier ou second axe LK & le parametre KO de cet axe soient égaux à des lignes données; je nomme d'abord le premier axe LK, $2t$; son parametre KO, p; & j'ai $KO(p) = \frac{2gt}{a}$, & $LK(2t) = \frac{f}{g}\sqrt{cc + 4dg - hg}$ (il faut se ressouvenir que $h = \frac{\overline{b+g}^2}{a}$); ce qui donne $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc + 4dg - hg}}$: d'où l'on voit que si $cc + 4dg$ surpasse hg, & qu'on prenne pour g & pour f ces valeurs, on trouvera dans la construction de la cinquiéme équation pour le premier axe LK & son parametre KO les lignes données $2t$ & p. Mais s'il arrive que $cc + 4dg$ soit moindre que hg, il faudra nommer le second axe LK, $2t$; & son parametre KO, p; ce qui donne comme ci-dessus $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{hg - cc - 4dg}}$; où l'on doit observer que $2t$ & p ne marquent plus à present les mêmes lignes qu'auparavant : & s'il arrive que hg, dans cette derniere supposition où $2t$ marque le second axe, surpasse $cc + 4dg$, il est visible qu'en prenant pour g & f ces valeurs dans la construction de la cinquiéme équation, on trouvera pour le second axe LK & son parametre KO les lignes données $2t$ & p.

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de f soit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces suppositions; & alors on voit que la construction devient impossible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en sont servis aprés M. Sluze qui en est l'inventeur, la donnent pour generale; j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réüssit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fussent données, la construction seroit toûjours possible; car si

aprés avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles LK, $2t$; & son parametre KO, p; il se trouvoit que la valeur de $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dc-hg}}$ fût imaginaire, c'est à dire, que hg surpassât $cc+4dg$; il n'y auroit qu'à se servir dans la construction à la place de cette Hyperbole de sa conjuguée & de son second axe, puisque le second axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de f ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc+4dg=hg$, l'équation du quatriéme degré s'abaisse à une du second.

REMARQUE.

397. 1°. Si l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura $g=a$, & on se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4dg$ surpasse hg, c'est à dire, en mettant pour h sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$, & pour g sa valeur a, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toûjours possible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpasse son parametre. On se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; car il suit de là que $cc+4dg$ surpasse hg, c'est à dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour h sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$) que $\frac{acc}{g}+4ad$ surpasse $\overline{b+g}^2$, puisque dans cette supposition g $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ étant moindre que a, la quantité $\frac{acc}{g}+4ad$ sera plus grande que $cc+4ad$, & $\overline{b+g}^2$ sera moindre que $\overline{b+a}^2$. Au contraire lorsque $cc+4ad$ est moindre que $\overline{b+a}^2$, il faudra se servir du second axe; car il suit de là que $cc+4dg$ est moindre que hg, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ est moindre que $\overline{b+g}^2$

puiſque $2t$ marquant à preſent le ſecond axe qui eſt moindre que ſon parametre p la quantité $\frac{ap}{2t}$ eſt ici plus grande que a. D'où l'on voit que la conſtruction eſt toûjours poſſible, non ſeulement lorſque l'Hyperbole donnée eſt équilatere, mais encore lorſque le premier axe eſt plus grand que ſon parametre.

3°. Si le premier axe eſt moindre que ſon parametre. Il faudra neceſſairement lorſque $cc + 4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+a}^2$, ſe ſervir du premier axe; car ſi l'on employoit le ſecond, il faudroit que $cc + 4dg$ fût moindre que bg, ou que $\frac{acc}{g} + 4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}^2$; ce qui ne peut être, puiſque $2t$ qui exprimeroit alors le ſecond axe étant plus grand que p, la quantité g $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ ſeroit moindre que a. Mais en ſe ſervant du premier axe, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ ſoit moindre que $\overline{b+g}^2$, puiſque g $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt plus grand que a; & alors il eſt évident que la conſtruction du Problême devient impoſſible, parce que la valeur de f $\left(\frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-bg}}\right)$ renferme une contradiction. De même lorſque $cc + 4ad$ eſt moindre que $\overline{b+a}^2$, il faut neceſſairement ſe ſervir du ſecond axe; & comme alors la valeur de g $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt moindre que a, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ ſoit plus grand que $\overline{b+g}^2$, & qu'ainſi la valeur de f $\left(\frac{2gt}{\sqrt{bg-cc-4dg}}\right)$ ſoit imaginaire.

Il eſt donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la conſtruction de l'égalité propoſée dans le Problême devient impoſſible; & cela lorſque le premier axe de l'Hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, car autrement elle réüſſira toûjours.

COROLLAIRE I.

398 ~~389~~. Si l'on prenoit dans le Problême précedent la quatriéme équation au lieu de la cinquiéme, & qu'on fist la construction de même en se servant de l'Ellipse qui est le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui est le lieu de la cinquiéme: il est visible que l'on construiroit l'égalité proposée z^4 &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipse semblable à une donnée; ou avec une Ellipse donnée & un cercle.

COROLLAIRE II.

399. Il est évident qu'on peut rendre la construction précedente generale pour toutes sortes d'égalités du troisiéme & du quatriéme degré, en observant, 1°. De faire évanoüir le second terme de l'égalité donnée, lorsqu'elle en a un; de la multiplier ensuite par sa racine z lorsqu'elle n'est que du troisiéme degré; & de prendre un plan ab égal à tous les plans qui multiplient zz, un solide aac égal à tous les solides qui multiplient z, & enfin un sursolide a^3d égal à tous les sursolides donnés. 2°. D'effacer dans les valeurs de AD, DC, CF, AH, IH, LK, les termes où se trouve b lorsque zz ne se rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans lesquels se rencontrent c ou d lorsque le quatriéme où le cinquiéme terme manquent: & de changer de signes tous les termes où b se rencontre avec une dimension impaire, si le troisiéme terme de l'équation donnée a un signe different du troisiéme de la précedente; comme aussi ceux dans lesquels c ou d se rencontrent avec une dimension impaire lorsque le quatriéme ou le cinquiéme terme ont des signes differens des quatriéme & cinquiéme de l'égalité précedente. 3°. De prendre du côté de PM ces lignes lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives.

REMARQUE.

400. On peut toûjours rendre la construction précedente plus simple dans les égalités particulieres qu'on se propose de construire, en faisant en sorte que a soit égal à b; car il n'y a qu'à reduire l'égalité donnée sous cette forme $z^4 \mp aazz \mp aacz \mp a^3d = o$, au lieu de cette autre $z^4 \mp abzz \mp aacz \mp a^3d = o$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'est qu'on avoit en vûë de rendre la construction du Problême generale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire précedent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres differentes b, c, d, au premier degré.

PROPOSITION VI.

Problême.

401. ~~Construire~~ Trouver *les racines de l'égalité* $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aabb = o$, *par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle.*

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transfomera l'égalité donnée Fig. 232.
en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bbf^4}{aa} = o$.
Ayant mené d'un point quelconque M de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point A, une parallele MP à l'une des Asymptotes AQ, & qui rencontre l'autre au point P, on nommera les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; lesquelles font entr'elles un angle donné APM, & on aura par la proprieté de l'Hyperbole $xy = mm$, en supposant que mm en soit la puissance. Maintenant si l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{b}}$, on aura $bff = amm$, & $\frac{bbf^4}{aa} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{bbf^4}{aa}$ qui est le dernier terme de l'égalité précedente sa valeur

$xxyy$, & diviſant enſuite par xx, on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df^3}{ax} + yy = o$, qui ſe change (en mettant dans le terme $\frac{df^3}{ax}$ à la place de x ſa valeur $\frac{bff}{ay}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{bff}{a}$) en cette autre xx
* Art. 318. & 319. $- \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = o$, dont le lieu eſt * un cercle lorſque l'angle APM eſt droit.

Mais lorſque l'angle APM n'eſt pas droit, ou (ce qui revient au même) lorſque l'Hyperbole donnée n'eſt pas équilatere, il eſt évident que le lieu de la derniere équation n'eſt plus un cercle, mais une Ellipſe. C'eſt pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu ſoit un cercle, je prens ſur l'Aſymptote AP la partie $AB = 2a$: & ayant mené BE parallele à l'autre Aſymptote AQ, je tire du centre A la perpendiculaire AE ſur BE: & nommant les données BE, g; AE, e; je multiplie l'équation $xy - mm = o$, dont l'Hyperbole donnée eſt le lieu, par $\frac{g}{a}$; & j'ai $\frac{gxy}{a} - \frac{gmm}{a} = o$. J'ajoûte enſuite cette équation à la précedente lorſque l'angle fait par les Aſymptotes eſt aigu, & je l'en retranche lorſqu'il eſt obtus comme je le ſuppoſe dans cette figure: cela me donne $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff + gmm}{a} = o$,
* Art. 327. dont le lieu eſt un cercle * qui ſe conſtruit ainſi.
& 329.
Fig. 222. Soit priſe ſur l'Aſymptote AQ la partie $AD = \frac{df}{2b}$ du côté oppoſé à PM: ſoit tirée parallelement à AE, la ligne $DC = \frac{bf}{e} - \frac{dgf}{2eb}$ du côté de PM lorſque cette valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative: Enfin du centre C & du rayon $CM = \sqrt{\overline{AC} + \frac{cff - gmm}{a}}$ ſoit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & ſon oppoſée en des points M, d'où ayant mené des paralleles MP à l'Aſymptote

AQ; les parties AP de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a} x^3 - \frac{cff}{a} xx + \frac{df^3}{a} x + \frac{bhf^4}{aa} = o$: sçavoir celles qui sont du côté de PM, les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses.

Car par la proprieté du cercle, on trouve cette équation $yy - \frac{g}{a} xy + \frac{df}{b} y + xx - \frac{bf}{a} x - \frac{cff + gmm}{a} =$ qui se réduit (en mettant pour xy sa valeur mm) à cette autre $xx - \frac{bf}{a} x - \frac{cff}{a} + \frac{af}{b} y + yy = o$, dans laquelle mettant enfin pour y sa valeur $\frac{mm}{x}$ ou $\frac{bff}{ax}$, & pour yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'égalité même proposée $x^4 - \frac{bf}{a} x^3$ &c.

Si l'angle fait par les Asymptotes étoit aigu; il faudroit changer dans les valeurs de AD & de CM, les signes des termes où g se rencontre, dont la raison est que BE (g) devient negative de positive qu'elle étoit. Mais lorsque l'Hyperbole est équilatere, il faut effacer les termes où g se rencontre & mettre pour c sa valeur $2a$, parce que AE tombe alors sur AB: ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

Lorsqu'on a les differentes valeurs de x, il est évident qu'on a aussi celles de z, en faisant $z = \frac{ax}{f}$. Et c'est ce qui étoit proposé.

Corollaire I.

402. Si le dernier terme de l'égalité proposée du quatriéme degré, avoit le signe $-$, il est clair qu'en operant comme ci-dessus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme yy auroit le signe $-$, & dont le lieu par consequent ne seroit pas un cercle, mais * une Hyperbole. D'où l'on voit que cette methode ne peut servir que pour les égalités du quatriéme degré qui ont leur dernier terme avec le signe $+$. * Art. 332.

COROLLAIRE II.

403. ON pourra toûjours en se servant de la methode précedente, resoudre toute égalité donnée du troisiéme degré $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = 0$; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par $x + r$ lorsqu'il y a $+ aaq$, & par $x - r$ lorsque c'est $- aaq$, on la changera toûjours en cette autre du quatriéme degré.

$$x^4 \mp nx^3 \mp apxx \mp aaqx + aaqr = 0,$$
$$\;\;\;\mp r \;\;\; \mp nr \;\;\;\;\; \mp apr$$

dont le dernier terme $aaqr$ aura toûjours le signe $+$, & qui sera par consequent du nombre de celles qu'on peut construire de la maniere précedente.

Mais on abregera beaucoup la construction en observant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire a la ligne m racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, qui est le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puisque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée r pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$; ce qui donne $r = \frac{aa}{q}$. 3°. Que le cercle qui doit déterminer par ses interséctions les racines de l'égalité coupera necessairement l'Hyperbole lorsqu'il y a $- aaq$, & son opposée lorsque c'est $+ aaq$, en un point K, d'où ayant mené une parallele KH à l'Asymptote AQ, la partie AH de l'autre Asymptote doit être égale à r, puisque l'égalité du quatriéme degré a pour une de ses racines $x = \mp r$. De là on tire cette construction qu'il est facile de rendre generale pour toutes les égalités du troisiéme degré.

FIG. 223.

Je suppose que l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole donnée soit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire a la racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troisiéme degré sous cette expression $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$. Ayant pris sur l'Asymptote AP la partie $AB = 2a$, & mené BE parallele à l'autre Asymptote AQ, on tire

du centre A la perpendiculaire AE sur BE; & ayant pris sur AQ la partie $AL = q$ du côté de PM, parce-qu'il y a $- aaq$ dans l'égalité donnée, on tirera LK parallele à AP, & qui rencontre l'Hyperbole au point K. Cela fait, on nommera les données BE, g; AE, e; LK, r; & on prendra sur l'Asymptote AQ la partie $AD = \frac{gr}{2a} - \frac{1}{2}q = \mp d$ pour abreger, & on tirera $DC = \frac{an + ar \mp dg}{e}$ parallele à AE, en observant de prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On décrira enfin du centre C, & du rayon CK, un cercle qui coupera les Hyperboles opposées en des points M, d'où ayant mené des droites MP paralleles à l'Asymptote AQ; les parties AP de l'autre Asymptote seront les racines de l'égalité proposée $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$.

Car prolongeant les droites MP, KH, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DC aussi prolongée, s'il est necessaire, aux points G, F; on aura (à cause des triangles rectangles CFK, CGM) ces deux égalités $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CM}^2$, & $\overline{FK}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CK}^2$: & par consequent $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, puisque les lignes CM, CK, sont rayons d'un même cercle. Or par la construction (je suppose ici pour éviter l'embarras des signes $+$ & $-$, que $\frac{gr}{2a} - \frac{1}{2}q = + d$, c'est à dire, que cette valeur est positive) GM ou $PM + PG = y + \frac{g}{2a}x + d$, CG ou $DG - DC = \frac{ex}{2a} - \frac{an - ar - dg}{e}$, FK ou $KH + HF = q + \frac{g}{2a}r + d$, CF ou $CD - DF = \frac{an + ar + dg}{e} - \frac{er}{2a}$. C'est pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité précedente $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, on en formera d'abord celle-ci $yy + \frac{g}{a}xy + 2dy + \frac{gg + ee}{4aa}xx$

$-nx-rx=qq+\frac{g}{a}rq+2dq+\frac{gg+ee}{4aa}rr-nr-rr$, en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les quarrés de d & de $\frac{an+ar+dg}{e}$ qui se détruisent mutuellement. Si l'on considere à present qu'à cause de l'Hyperbole, le rectangle $xy=rq$, & qu'à cause du triangle rectangle AEB le quarré $4aa=gg+ee$, on changera l'équation précedente en celle-ci $yy+2dy+xx-nx-rx=qq+2dq-nr$, dans laquelle mettant d'abord à la place de $2d$ sa valeur $\frac{pr}{e}-q$, & ensuite à la place de y & yy leurs valeurs $\frac{aa}{x}$ & $\frac{a^4}{xx}$, & ordonnant l'égalité il vient

$$\begin{array}{llll} x^4-nx^3 & -apxx & -aaqx & +a^4=o, \\ \quad\;\; -r & +nr & +apr & \end{array}$$

qui étant divisée par $x-r$, donne enfin $x^3-nxx-apx-aaq=o$, qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction generale il faut observer, 1°. De prendre la partie AL sur l'Asymptote AQ du côté opposé à PM lorsqu'il y a $+aaq$ dans l'égalité donnée; & de changer de signes les termes où q & r se rencontrent dans les valeurs de AD, DC, 2°. De changer de signes le terme où p se rencontre dans la valeur de AD lorsqu'il y a $+apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorsque ce terme y manque: il faut faire la même chose à l'égard du terme où n se rencontre dans la valeur de DC, lorsqu'il y a $+nxx$. 3°. De changer de signe le terme où g se rencontre dans la valeur de DC, lorsque l'angle fait par les Asymptotes est obtus, & de l'effacer lorsqu'il est droit, en observant alors que $e=2a$.

REMARQUE.

404. L'ALGEBRE nous fournit des moyens faciles pour transformer toute égalité du quatriéme degré, en une autre du même degré dont les signes des termes soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

aura toûjours le signe $+$, il est visible qu'en se servant de cette préparation lorsque le dernier terme de l'égalité qu'on veut construire a le signe $-$, on rend la methode du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du quatriéme degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalite sont vraies, lorsque les signes de ses termes sont alternatifs; il s'ensuit qu'on n'a besoin alors que de l'Hyperbole donnée, puisque son opposée qui ne sert que pour les racines fausses devient inutile.

PROPOSITION VII.

Problême.

405. SOIT *proposée à construire l'égalité du sixiéme degré* $x^6 - bx^5 + acx^4 + aadx^3 + a^3exx - a^4fx + a^5g = 0$, *ou* $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = 0$ *(en sousentendant la ligne a qui rend le nombre des dimensions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité); par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troisiéme degré.*

Je prends pour le lieu du troisiéme degré $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, dans lequel les quantités $m, n, p, q,$ que l'on regarde comme données, se doivent determiner d'une maniere convenable pour satisfaire au Problême; ce que je fais en cette sorte: en quarrant chaque membre, j'ai

$$\begin{array}{l} x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy, \\ \qquad\qquad\quad - 2n \qquad + 2q \qquad - 2mq \end{array}$$

& comparant les termes $-2mx^5, -2nqx, +qq$ avec leurs correspondans dans la proposée $-bx^5, -fx, +g,$ je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par consequent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$. Si l'on met à present à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ sa valeur $ppxxyy - mmx^4$ &c. trouvée par le moyen de l'équation précedente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ sa valeur $-cx^4 - dx^3$ &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant divisé par xx, on transf.

poſe toutes les quantités d'un même côté, on formera cette équation

$$\begin{array}{llll} ppyy & -mmxx & -2mnx & -nn = 0, \\ & +2n & -2q & +2mq \\ & +c & +d & +e \end{array}$$

* Art. 328. & 329. dont le lieu ſera * un cercle ſi la quantité $c+2n-mm$ (qui multiplie le quarré xx) eſt poſitive, & qu'on prenne $pp = c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$; car diviſant par pp, & faiſant pour abreger $2r = \frac{2mn+2q-d}{pp}$ & $ss = \frac{2mq+e-nn}{pp}$ ou $\frac{nn-2mq-e}{pp}$, on aura $yy+xx-2rx \mp ss = 0$: ſçavoir $+ss$ lorſque $2mq+e$ ſurpaſſe nn; & $-ss$, lorſqu'il eſt moindre.

Pour conſtruire la ligne courbe qui eſt le lieu de la premiere équation $x^3 - xx - nx + q = -pxy$, je ſuppoſe à l'ordinaire deux lignes droites inconnuës & indé-

Fig. 224. terminées $AP\,(x)$, $PM\,(y)$ qui faſſent entr'elles un angle droit APM; & je tire par l'origine A des x, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM, ſur laquelle ayant pris du côté de PM la partie $AG\,\frac{n}{p}$, & du côté oppoſé la partie $GB = \frac{q}{mp}$, je mene du côté de PM la droite $BC = m$ perpendiculaire à AQ. Cela fait, je décris ſur un plan ſeparé une Parabole MEM qui ait pour parametre de ſon axe la ligne $p = \sqrt{c+2n-mm}$, & ayant placé ce plan ſur celui-ci en ſorte que l'axe de la Parabole ſe confonde avec la ligne AQ & que la Parabole s'étende vers le côté oppoſé à PM, je prends ſur cet axe depuis ſon origine E vers le dedans de la Parabole la partie $EF = BG = \frac{q}{mp}$. Je me ſers enfin d'une longue regle indéfinie CF mobile autour du point fixe C, & qui paſſe toûjours par le point F, & la faiſant tourner autour du point C, en ſorte qu'elle faſſe gliſſer la partie EF de l'axe de la Parabole le long de la ligne AQ. Je dis que les deux interſections continuelles M, M, de cette regle avec la Parabole MEM décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui ſeront le lieu

qu'on

qu'on demande. Car par la construction AB ou $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la proprieté de la Parabole $EQ = \frac{xx}{p}$ puisque AP ou $MQ = x$. Or les triangles semblables FQM, MDC, donnent FQ ou $EQ - EF$ $(\frac{xx}{p} - \frac{q}{mp})$. $QM(x)$ :: DM ou $PM - AB$ $(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{p})$. $CD(m - x)$. Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et si l'on prend successivement les points M dans les trois angles qui suivent celui-ci, on trouvera toûjours la même équation, en observant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorsque les points P & M tombent du côté opposé à celui-ci: de sorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, seront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour construire le cercle qui est le lieu de la seconde équation $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$, il n'y a qu'à prendre sur la droite indéfinie AP la partie $AH = r$ du côté de PM lorsque la valeur de r est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative; ensuite du centre H & du rayon $HM = \sqrt{rr \pm ss}$, sçavoir $-ss$ lorsqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorsque c'est $-ss$, décrire un cercle; car à cause du triangle rectangle HPM, on aura toûjours $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$, c'est à dire en mettant les valeurs analytiques, & transposant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$.

Je dis maintenant que si des points M où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires MQ sur la droite indéfinie AQ; ces lignes seront les racines de l'égalité proposée: sçavoir celles qui tombent à droit, les vraies; & celles qui tombent à gauche, les fausses. Car menant des paralleles

Tt

MP à AQ, on trouve par la proprieté des conchoïdes cette équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, c'est à dire, en quarrant chaque membre, $ppxxyy = -x^6 - 2mx^5$ &c; & par la proprieté du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = -ppx^4 + 2pprx^3 \pm ppssxx$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle si l'on met à la place de $2r$, ss, pp, m, n, q, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c.

S'il y avoit dans l'égalité proposée $-dx^3$ au lieu de $+dx^3$, il est visible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn + 2q + d}{pp}$, le reste de la construction ne changeroit point, puisque d ne se rencontre que dans la valeur de r. Et comme alors tous les signes des termes de l'égalité proposée sont alternatifs; c'est une maxime receuë en Algebre que toutes ses racines réelles seront vraies; c'est à dire, que si cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles seront vraies; si elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre seront vraies; & enfin si toutes les six sont réelles, elles seront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a besoin alors que de la conchoïde qui est décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe C, puisque l'autre ne sert que pour les racines fausses.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin si petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point; ce seroit une marque infaillible que toutes les racines de l'égalité seroient imaginaires. S'il les coupoit en six points, toutes les racines seroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres seroient imaginaires. Il faut toûjours prendre garde que si le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réünissoit deux points infiniment proches, en sorte que l'égalité proposée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point sur BE.

REMARQUE I.

406. Il suit de la description des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Asymptote commune la droite *BE* infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes passe par le point fixe *C*, & qu'alors la regle *CF* la touchera en ce point; puisque le point *M* se réünissant au point *C*, la regle passe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorsque le point *F* tombe sur *B*, la regle *CF* qui décrit par les interfections *M*, *M*, avec la Parabole les conchoïdes, tombe sur *CB*; & qu'ainsi la ligne *MFM* devient la double ordonnée qui part du point *F*: c'est à dire que la ligne *CB* rencontre les conchoïdes en deux points *K*, *L*, tels que *BK* & *BL* sont égales chacunes à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point *F*. D'où il est clair que si *BC* étoit égale à cette ordonnée, le point *K* tomberoit alors sur le point *C*; & qu'ainsi la ligne *BC* qui passeroit par deux points infiniment proches *K*, *C* de la conchoïde la toucheroit en se réünissant toute entiere dans le seul point *C*.

Il n'est pas necessaire de se servir de la Parabole *MEM* FIG. 225. pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris sur *BE* la partie *BO* égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque *OR* plus grand que *OB* un cercle qui coupe *BC* aux points *D*, *D*; on prendra sur ce diametre la partie *RS* égale à *EF*, & on tirera par le point fixe *C* les deux droites *CM*, *CM*, paralleles à *DS*, *DS*, qui rencontreront les paralleles *DM*, *DM*, à *EB* en des points *M*, *M*, qui seront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé *CM* jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Asymptote *BE* au point *F*; & mené *MQ* parallele à *BC*; il est clair que les triangles rectangles *MQF*, *DBS*, seront égaux, & qu'ainsi *FQ* est égale à *BS*. Or ayant pris *RS* égale à *EF*; on aura $EF + FQ$, ou $EQ = RS + SB$ ou *RB*; & la Parabole *EM* qui a pour sommet le point *E*, & pour

parametre une ligne égale à BO, passera par le point M; puisque par la proprieté du cercle le quarré de BD ou MQ, est égal au rectangle de BR ou EQ par le parametre BO; ce que donne aussi la proprieté de la Parabole. D'où il suit que le point M trouvé par cette construction, n'est pas different de celui que donneroit l'interfection de la regle CF avec la demie Parabole EM. *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point D étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point R, que mener DR perpendiculaire à OD; & le reste de la construction ne changeroit point.

J'avertirai ici en passant, 1°. Que si l'on prend sur BC du côté du point C, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité du troisiéme degré $x^3 - \frac{1}{2}mxx - \frac{1}{2}mnp = o$ (les données $BC = m, EF = n, BO = p$); & qu'on trouve ensuite le point M comme l'on vient d'enseigner: ce point sera plus éloigné de la droite BC que tous les autres points de la portion KMC, de sorte que la tangente qui passe par ce point sera parallele à BC. 2°. Que si l'on prend sur BC prolongée de l'autre côté du point B, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité $x^3 - mnp = o$; le point M de la conchoïde qui répond au point D, en sera le point d'inflexion: c'est à dire, le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le supposer comme vrai, & remetre à en chercher la raison aprés avoir lû ce Livre ou quelque chose d'équivalent, d'autant plus que cela est inutile pour la resolution des égalités du sixiéme degré dont il est ici question.

REMARQUE II.

407. Il est visible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne BC ($\frac{1}{2}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainsi l'égalité proposée doit avoir un second terme. 2°. Que le terme q ne peut être

nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, puisqu'en divisant par x, elle deviendroit cette autre $xx - mx - n = -py$, dont le lieu est une Parabole; d'où il est clair que le dernier terme g se doit trouver dans l'égalité proposée avec le signe $+$, puisque $q = \sqrt{g}$.

De plus si le terme fx avoit le signe $+$, on lui donneroit le signe $-$ en changeant aussi les signes du deuxiéme & du quatriéme terme; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit seulement les racines fausses en vraies & les vraies en fausses. Et afin que le lieu de la deuxiéme équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \mp c$ (sçavoir $+c$ lorsqu'il y a $+cx^4$, & $-c$ lorsqu'il y a $-cx^4$) surpassât $\frac{1}{4}bb$. D'où l'on voit que le terme fx manquant, il faut que le terme cx^4 ait le signe $+$, & que c surpasse $\frac{1}{4}bb$; & que si le terme cx^4 manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit surpasser $\frac{1}{4}bb$.

Il est donc évident que ce sont-là les conditions que doit avoir necessairement l'égalité proposée du sixiéme degré, afin qu'on la puisse construire immediatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la précedente.

REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'est que du cinquiéme degré, on peut souvent en l'élevant au sixiéme, lui donner en même temps toutes les conditions necessaires pour être construite immediatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°. $x^5 - a^4b = o$, où l'on suppose que a surpasse b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du sixiéme $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = o$, qui a toutes les conditions requises dans la remarque précedente.

Soit 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^4x - a^4b = o$, dans laquelle a surpasse b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4xx - 6a^4bx + a^4bb = o$,

qui a toutes les conditions necessaires.

Soit 3°. $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$. Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne $x^6 - 5ax^5 + 19a^3x^3 - 9aaxx - 13a^5x + 4a^6 = 0$, qui est une égalité du sixiéme degré, dans laquelle toutes les conditions necessaires se rencontrent.

Il est bon d'avertir que la premiere égalité $x^5 - a^4b = 0$, sert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes A, B; que la seconde $x^5 - 5aax^3$ &c. sert à diviser un angle donné en cinq parties égales; & enfin que la troisiéme $x^5 - ax^4$ &c. sert à inscrire dans un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés: & c'est ce qu'on verra dans les articles du Livre suivant. Je vais donner la construction de la premiere de ces égalités, afin qu'on la puisse comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troisiéme Livre de la Geometrie de M. Descartes.

FIG. 226. Ayant décrit une Parabole ME qui ait pour le parametre de son axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$, GB ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{5aab}{4pp}$, & une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; on décrira d'abord une conchoïde parabolique COM (comme l'on a enseigné dans l'article 404.) à l'aide de la Parabole ME, & d'une longue regle CF qui tourne librement autour du point fixe C, & qui passe toûjours par le point F, pendant que la partie EF de l'axe de la Parabole glisse le long de la ligne AQ; & ensuite un cercle du centre H & du rayon $HM = \sqrt{\overline{AH}^2 \mp ss}$, sçavoir $+ss$ lorsque $4bb$ surpasse aa, & $-ss$ lorsqu'il est moindre. Je dis que si des points O, M, où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires OR, MP, sur AP; les parties AR, AP, seront les racines de l'égalité $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$. Cela se prouve comme dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre H, doit couper la conchoïde COM en un point O, tel qu'ayant mené OR perpendiculaire sur AP, on a la partie $AR = b$; puisque l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pourquoi ayant pris sur AP la partie $AR = b$, & tiré RO perpendiculaire à AP & qui rencontre en O la conchoïde COM; il n'y a qu'à décrire du centre H & du rayon HO un cercle. Car il la coupera en un autre point M, tel, qu'ayant mené MP perpendiculaire sur AP; la ligne AP sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre H ne coupe la conchoïde qui passe par le point C qu'en deux points O, M, & ne rencontre point l'autre; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c. n'a que deux racines vraies AR, AP, & les quatre autres imaginaires.

REMARQUE IV.

409. LORSQUE l'égalité donnée du sixiéme degré, n'a point les conditions necessaires pour être construite immediatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquiéme degré, la remarque précedente se trouve inutile, on pourra se servir de la préparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré en une autre du sixiéme, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connuë du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë du second : ce qui rend la construction du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette préparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la Propofition fuivante une conftruction generale pour toutes fortes d'égalités du cinquiéme & du fixiéme degré, qui ne fuppofe point d'autre préparation que celle de faire évanoüir le fecond terme.

PROPOSITION VIII.

Problême.

410. TROUVER *les racines de l'égalité* $x^6 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = 0$, *par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.*

Fig. 227. Soit $aay = x^3$ l'équation dont le lieu eft la premiere Parabole cubique MAM ($AP = x, PM = y, AB = a$). Je mets dans l'egalité propofée à la place de x^6 fa valeur a^4yy, à la place de x^4 fa valeur $aaxy$, & à la place de x^3 fa valeur aay; ce qui la change en cette équation du fecond degré $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^4}xx - \frac{f}{a^4}x + \frac{g}{a^4}$

* Art. 323. $= 0$, dont le lieu eft une Ellipfe *lorfque d furpaffe $\frac{1}{4}bb$, c'eft à dire, lorfque la quantité connuë qui multiplie xx furpaffe le quarré de la moitié de la quantité connuë qui multiplie x^4, comme je le fuppofe ici. Et fi l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité propofée, & qui y eft fousentenduë, foit égale au parametre a de la Parabole cubique donnée; cette équation fe changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, dont voici la conftruction.

Ayant pris fur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on tirera parallelement à PM & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point A la droite AE (e), & par le point D une parallele DG à AE, fur laquelle on prendra du côté de PM la partie DC (s) $= \frac{2afe+bce}{4ad-bb}$, & de part & d'autre du point C les

parties

parties CK, CL, égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee - 4agee}{4ad - bb}}$. Cela fait, du diametre LK $(2t)$ qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4adt - bbt}{2ee}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM, on décrira l'Ellipse cherchée.

Maintenant si des points de rencontre de cette Ellipse avec la Parabole cubique donnée, on abaisse des lignes MP qui fassent avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, les parties AP de la droite indéfinie sur laquelle s'étend l'indéterminée x seront les racines cherchées, sçavoir celles qui tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, les vraies; & celles qui tombent du côté opposé, les fausses. Car par la proprieté de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, & par la proprieté de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$; & mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'équation précedente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3$ &c. $= 0$.

REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré étant donnée, si l'on en fait évanoüir le second terme, & qu'aprés l'avoir multipliée par l'inconnuë x lorsqu'elle n'est que du cinquiéme degré, on se serve du parametre a de la Parabole cubique donnée pour reduire sous l'expression ab les quantités connuës qui multiplient x^4, sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c; il est visible qu'en faisant la substitution comme ci-dessus, on transformera toûjours l'égalité donnée en un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque a, & dont l'angle APM que font les appliquées PM avec le diametre AP, peut-être pris à volonté; on pourra toûjours par

son moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, resoudre toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré.

REMARQUE II.

412. LORSQU'APRE'S avoir fait évanoüir le second terme d'une égalité donnée du cinquiéme & du sixiéme degré, & l'avoir multipliée par l'inconnuë x si elle n'est que du cinquiéme; la quantité connuë qui multiplie le quarré xx est positive, & surpasse le quarré de la moitié de celle qui multiplie x^4: on arrivera toûjours en faisant la substitution par le moyen de $aay = x^3$, à une équation du second degré dont le lieu est une Ellipse, comme l'on a vû dans ce Problême. Or l'on pourra toûjours faire en sorte que cette Ellipse devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

* Art. 378. Ayant trouvé une ligne a * dont le quarré de quarré a^4 soit égal à la quantité connuë qui multiplie xx, on se servira de cette ligne a pour reduire sous l'expression ab toutes les quantités connuës qui multiplient x^4, sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c; ce qui reduira l'égalité donnée sous cette forme $x^6 \pm abx^4 \pm aacx^3 + a^4xx \pm a^4fx \pm a^5g = 0$. Et mettant a^4yy, $aaxy$ & aay à la place de x^6, x^4 & x^3, on trouvera cette équation du second degré $yy \pm \frac{b}{a}xy \pm cy + xx \pm fx \pm ag = 0$, dont le lieu sera * un cercle, si l'on fait en sorte que l'angle AEB soit droit; ce qui est facile en cette maniere.

* Art. 327. & 329.

FIG. 228. Ayant pris sur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle AEB, du côté où l'on suppose que PM doit tomber, lorsqu'il y a $-\frac{b}{a}xy$, & du côté opposé lorsqu'il y a $+\frac{b}{a}xy$. On portera sur la demi circonfe-

rence de B en E, une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré AB (e), la ligne PM doit être parallele à BE, & on achevera le reste de la construction comme pour l'Ellipse, qui deviendra alors un cercle; puisque l'angle CGM sera droit, & qu'à cause du triangle rectangle AEB il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raison du diametre LK à son parametre. La figure qui est ici à côté represente la construction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = 0$, qui n'est differente de celle du Problême qu'en ce que $d = a$.

Maintenant ayant pris sur la ligne AB autant de parties AP, AP, &c. qu'on voudra, & mené des paralleles PM, PM, &c. à BE; on prendra chaque PM égale à la quatriéme proportionnelle à sa correspondante AP & la donnée AB. Et faisant passer une ligne courbe MAM par tous les points M ainsi trouvés, il est évident qu'elle sera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par consequent la premiere Parabole cubique qui par ses points d'intersection M, M, avec le cercle, servira à découvrir les racines AP, AP, de l'égalité proposée.

REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé souvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la premiere Parabôle cubique pour resoudre les égalités du cinquiéme & du sixiéme degré; je crois qu'il n'est pas hors de propos d'examiner les differentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de position deux lignes droites indéfinies BC, DE, qui s'entrecoupent au point A, & soit dans l'angle BAD FIG. 229. une Parabole AM de tel degré qu'on voudra, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à DE, qui rencontre BC au point P; & ayant nommé les indéterminées AP, x; PM, y; la donnée AB, 1; on ait toûjours $x^m = y^n$ (les lettres m & n marquent les exposans des puissances de

x & y qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra; & l'on suppose seulement que m surpasse n). Il est évident 1°. Que AP (x) étant nulle ou zéro, PM (y) l'est aussi, & que plus AP (x) croît, plus aussi PM (y)

* Art. 237. augmente; & cela à l'infini. 2°. Que la soutangente PT* $\left(\frac{n}{m}x\right)$ est toûjours moindre que AP (x), puisque l'on suppose ici que n soit moindre que m. D'où il suit que la Parabole AM de tel degré qu'elle puisse être, passera toûjours par le point A; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC que l'on regarde comme son diametre; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diametre. Mais comme la ligne courbe AM qui tombe dans l'angle DAB, n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles DAC, CAE, EAB, elle doit se continuer; & pour cela il faut distinguer trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre pair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre impair. La racine m de x^m sera $\mp x$, & la racine n de y^n sera seulement $-+y$; car soit par exemple, $m=4$ & $n=3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatriéme de $\mp x$ est toûjours x^4, & qu'il n'en est pas de même du cube de $\mp y$; puisque le

FIG. 229. cube de $-+y$ est y^3, & celui de $-y$ est $-y^3$. De là il est évident que AP (x) peut être positive & negative, & PM (y) toûjours positive; d'où l'on voit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle DAC, qui est à côté de l'angle BAD, en sorte que si par un point quelconque K de la ligne AD, on tire une parallele à BC, elle rencontrera la Parabole MAM en deux points M, M, qui seront également éloignés du point K. Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx=ay$, ou $xx=y$ en faisant le parametre $a=1$.

Second cas. Lorsque les exposans m & n sont des nombres impairs. La racine m de x^m sera seulement $-+x$, & de même la racine n sera $-+y$; mais parceque l'équation

$-x^m = -y^n$ est la même que $x^m = y^n$, & que la racine m de $-x^m$ est $-x$, & la racine n de $-y^n$ est $-y$; il s'ensuit que AP (x) peut être positive & negative de même que PM (y), en observant que lorsque AP est positive, PM l'est aussi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole AM doit alors se continuer dans l'angle CAE opposé au sommet à l'angle BAD, dans une position toute semblable, mais renversée; en sorte que prenant AP égale à AP, & menant PM qui fasse avec AP l'angle APM égale à l'angle APM; cette ligne PM rencontre la portion AM qui tombe dans l'angle CAE, en un point M tel que PM est égal à PM. Telle est la premiere Parabole cubique $x^3 = aay$, ou $x^3 = y$ en faisant $a = 1$. FIG. 230.

Troisiéme cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre impair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre pair. La racine m de x^m sera toûjours $-+x$, & la racine n de y^n sera $\mp y$; car soit par exemple, AM une seconde Parabole cubique qui est le lieu de l'équation $x^3 = ayy$, ou $x^3 = yy$, il est clair que la racine cubique de x^3 est seulement $-+x$, & que celle de yy est $\mp y$. D'où il suit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle BAE qui est à côté de l'angle BAD; en sorte que si l'on mene par un point quelconque P de la ligne AB une parallele à DE, elle rencontrera la Parabole entiere MAM en deux points M, M, également eloignés du point P. FIG. 231.

Or l'équation generale $x^m = y^n$ appartient toûjours à l'un de ces trois cas; car si m & n étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quarrée autant de fois qu'il seroit possible; ce qui la reduiroit à une équation dont l'un des exposans seroit necessairement impair. Et l'on peut toûjours supposer que m surpasse n; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aax = y^3$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole AM à ceux de la ligne DE, & nommant alors AK, x; KM, y; cette autre équation $x^3 = aay$ FIG. 232.

qui exprimeroit aussi la nature de la même Parabole AM, & dans laquelle l'exposant de la puissance de x est plus grand que celui de la puissance de y ; de sorte qu'on pourroit faire alors le même raisonnement par rapport à la ligne DE, qu'on vient de faire par rapport à la ligne BC. De là il est évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puissent être, auront toûjours l'une des trois figures précedentes.

PROPOSITION IX.

Problême.

414. SOIT *proposée à construire l'égalité du huitiéme degré* $x^8 - bx^7 + cx^6 \quad dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx \quad hx + l = 0$, *dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux geometriques ; l'un du second degré, & l'autre du quatriéme.*

Ayant pris $xx = ay$ pour le lieu du second degré, on substituëra à la place de x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3, & xx, leurs valeurs a^4y^4, a^3y^3x, a^3y^3, $aayyx$, $aayy$, ayx, ay, & en prenant la droite donnée a pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + aeyy - afxy + aagy - aahx + a^4l = 0$ dont le lieu est du quatriéme degré, & des plus simples ; puisque l'une des inconnuës x n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on construit à present la Parabole qui est le lieu de la premiere équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour y autant de differentes grandeurs que l'on voudra, on détermine les valeurs de x qui leur répondent dans la seconde équation ; le lieu qui passera par les extrêmités de toutes les y, & qui sera par consequent celui de la seconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui est visible ; puisque mettant dans cette seconde équation pour y sa valeur

$\frac{xx}{a}$, & pour les puiſſances de y les puiſſances de cette valeur, on retrouve l'équation donnée $x^8 - bx^7$ &c $= o$.

COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité a eſt arbitraire, on peut ſuppoſer qu'elle eſt donnée, & qu'ainſi la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation $xx = ay$ eſt donnée. Or il eſt évident qu'on pourra toûjours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du ſeptiéme ou huitiéme degré, en une autre équation du quatriéme, dans laquelle l'inconnuë x ne ſe trouve qu'au premier degré. D'où il ſuit que toute égalité du ſeptiéme ou du huitiéme degré, dans laquelle ou tous les termes ſe rencontrent ou ſeulement une partie, ſe pourra toûjours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatriéme degré, dans lequel l'une des inconnuës ne ſe trouvera qu'au premier ; & cela ſans autre préparation que de prendre pour l'unité le parametre a de la Parabole donnée, afin de reduire ſous l'expreſſion ac les quantités connuës qui multiplient x^6, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x^5, &c.

COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuviéme ou du dixiéme degré ſe pourra toûjours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquiéme degré dans lequel l'une des inconnuës ne ſe trouvera qu'au premier degré : que les égalités de l'onziéme & du douziéme degré ſe conſtruiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du ſixiéme degré ; & ainſi de ſuite pour les autres à l'infini.

du dixiéme & du onziéme degré en les élevant au douziéme.

Mais si l'on propose une égalité du seiziéme degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3 y$, on la transformera en un lieu du cinquiéme. On trouvera de même qu'une égalité du vingtiéme degré se transformera en un lieu du sixiéme, en se servant encore du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3 y$; comme aussi celles du dix-septiéme, dix-huitiéme & dix-neuviéme degré: que les égalités du vingt-cinquiéme degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, se transformeront en un lieu du sixiéme degré, en se servant du lieu du cinquiéme $x^5 = a^4 y$; comme aussi toutes les égalités du vingt-uniéme, vingt-troisiéme vingt-quatriéme degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

REMARQUE. I.

419. Il est à propos de remarquer que si dans une égalité du seiziéme degré non seulement le second terme manquoit, mais le troisiéme & le sixiéme; le lieu du cinquiéme degré lequel joint avec celui du quatriéme $x^4 = a^3 y$ sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatriéme, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seiziéme degré dans laquelle il n'y a que le deuxiéme terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquiéme, si l'on employe à cet effet le lieu du quatriéme $x^4 = a^3 y$ qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus simples pour resoudre une équation complette du seiziéme degré, doivent être, l'un du quatriéme & l'autre du cinquiéme. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatriéme degré composé de plusieurs termes à la

place de $x^4 = a^3y$ qui n'en n'a que deux, on pourra choisir ce lieu en sorte qu'il servira à transformer l'égalité complette du seiziéme degré en un autre lieu du quatriéme. En voici la raison. Si l'on prend deux lieux du quatriéme degré dans l'un desquels l'inconnuë x monte au quatriéme degré, & dans l'autre l'inconnuë y, il est constant par les regles de l'Algebre, qu'en faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnuë x montera au seiziéme degré. Or comme deux lieux du quatriéme degré, peuvent avoir ensemble plus de seize termes, puisque chacun en peut avoir quinze differens, il s'ensuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connuës de l'égalité donnée: ce qui suffit pour faire voir la possibilité de construire une égalité complette du seiziéme degré par deux lignes du quatriéme.

On doit de même penser que les deux lieux les plus simples pour construire une égalité complette du vingtiéme, dix-neuviéme, & dix-septiéme degré, seront, l'un du quatriéme, & l'autre du cinquiéme, parce que la reduite de ces deux lieux montera au vingtiéme degré, & qu'ils pourront contenir ensemble plus de termes que la proposée, & renfermer par consequent toutes les quantités connuës qui s'y rencontrent. Et si l'inconnuë avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimensions dans l'égalité proposée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De là on forme la regle suivante, qui sert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent resoudre une égalité proposée; en sorte qu'ils soient les plus simples qu'il est possible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimension de l'inconnuë. Si elle est exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités; & si elle ne l'est pas, ou le reste est égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité: ou le reste est plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent resoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnuë soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixiéme degré, & l'autre du septiéme; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septiéme degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

Remarque II.

420. Il arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux differentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuviéme degré $x^9 -+ a^8x - a^8b = 0$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultiéme. Je prends l'équation $x^3 = aay$, dont le lieu est une Parabole cubique MAM qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites PM (y) qui font avec les parties correspondantes AP (x) de son axe ou diametre un angle pris à volonté APM que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^6y^3$; ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^3 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur AP prolongée du côté de A la partie $AC = b$; & ayant mené par le point C la droite indéfinie CK parallele à PM, soit décrite une autre Parabole cubique MCM qui ait pour axe CK, & pour appliquées des droites KM paralleles à AP, & dont le pa- Fig. 133.

rametre $CD = a$. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car par la construction MK ou $CP = b - x$, & par la proprieté de la courbe $CK^3 = MK \times \overline{CD}^2$, c'est à dire en termes analytiques $y^3 = aab - aax$. Or il est évident 1°. Que si des points M où cette derniere Parabole cubique MCM rencontre l'autre MAM, on mene des paralleles MP à CE; les parties AP exprimeront les racines x de l'égalité proposée $x^9 + a^8 x - a^8 b = 0$. 2°. Que les Paraboles cubiques MCM, MAM, sont précisément les mêmes; puisque leurs parametres AB, CD, sont égaux, & que les angles APM, CKM, que font leurs appliquées avec leurs axes le sont aussi.

La situation des deux Paraboles cubiques MAM, MCM, fait connoître que l'égalité proposée $x^9 + a^8 x - a^8 b = 0$, n'a qu'une racine réelle $AP\ (x)$, qui est toûjours vraie & moindre que $AC\ (b)$; de sorte que les huit autres sont imaginaires.

PROPOSITION XI.

Problême.

421. CONSTRUIRE *toute égalité de tel degré qu'elle puisse être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puisse déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.*

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité proposée tout seul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviser ensuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, repetée autant de fois qu'il sera necessaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes: comme si l'on proposoit $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex - a^4f = 0$, on auroit $f = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$.

FIG. 234. Cela fait, on prendra sur une ligne droite indéfinie AB dont l'origine fixe soit au point A, une partie quelcon-

que AP pour la valeur de x; & ayant mené parallelement à la ligne AC donnée de position une droite PM $= \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ (ce qui se peut toûjours faire * en n'employant que des lignes droites), son extremité M sera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les intersections M, M, M, &c. avec une ligne droite KM menée parallelement à AB par le point K tel que $AK = f$, détermineront des parties KM, KM, KM, &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnuë x dans l'égalité donnée. * Art. 376.

Car menant les droites MP, MP, MP, &c. paralleles à AC, & nommant les indéterminées AP, x; PM, y; on aura par la proprieté de la courbe $ADEM$ cette équation $PM\ (y) = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquiéme degré; & par la proprieté de la droite KM cette autre $y = f$. Ce qui, en substituant pour y sa valeur f, & multipliant par a^4, donne l'égalité même proposée $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx + a^3ex - a^4f = 0$.

Ces sortes de constructions peuvent être trés-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une methode pour déterminer sur la ligne AC les parties AF, AG, telles que les droites FD, GE, paralleles à AB touchent la courbe en des points D, E; il est clair 1°. Que si $AK\ (f)$ est moindre que AF & plus grande que AG, comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies KM, KM, KM, & les deux autres imaginaires; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne KM la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si $AK\ (f)$ est moindre que AG, la ligne KM coupera la courbe en cinq points; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si AK surpasse AF, l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK = AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux

égales entr'elles; sçavoir FD, FD. 5°. Et enfin que si $AK = AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, sçavoir GE, GE.

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point A, servira à trouver les racines de l'égalité $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex + a^4f = 0$, qui ne differe de la précedente qu'en ce que le dernier terme a le signe $+$; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite KM au dessous de AB, puisque son lieu doit être $y = -f$.

REMARQUE.

422. ON peut varier la construction précedente en differentes manieres; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui se suivent immediatement, & les diviser ensuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnuë y, le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troisiéme degré $x^3 - abx - aac = 0$; je fais $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^3}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3 = aay$, & $y = \frac{bx}{a} + c$, dont les lieux étant construis separément donneront les racines de l'égalité proposée. Voici comment.

FIG. 235. Ayant pris à l'ordinaire pour inconnuës & indéterminées les deux droites AP (x), PM (y) qui font entr'elles un angle quelconque APM, soit décrite une premiere Parabole cubique MAM qui soit le lieu de la premiere équation $x^3 = aay$. Soit menée par le point A origine des x une ligne droite parallele à PM, sur laquelle soient prises les parties $AC = b$, $AD = c$ du côté où s'étend PM; & ayant pris sur AP prolongée du côté de A la partie $AB = a$, soit tirée par le point D une parallele indéfinie à BC. Je dis que si des points M où elle rencontre la premiere Parabole cubique MAM, on mene des paralleles MP à AC; les cou-

pées AP seront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

Car menant DE parallele à AP, les triangles semblables BAC, DEM, donneront $BA(a)$. $AC(b)$ :: $DE(x)$. $EM = \frac{bx}{a}$, & par consequent $PM(y) = \frac{bx}{a} + c$. Or à cause de la premiere Parabole cubique MAM, l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de y sa valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

S'il y avoit $+b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre AC du côté opposé à PM, & il en est de même de AD lorsqu'il y a $+c$: de sorte que cette construction est generale pour toute égalité donnée du troisiéme degré. Car il est évident qu'aprés en avoir fait évanoüir le deuxiéme terme, on peut toûjours la reduire sous l'une de ces formes.

Il est visible qu'on peut se servir d'une Parabole cubique donnée, puisqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire a égale à son parametre.

PROPOSITION XII.

Problême.

423. APPROCHER *de plus en plus à l'infini de la juste valeur des racines de toute égalité du troisiéme & du quatriéme degré ; & des égalités qui passent le quatriéme degré lorsqu'elles n'ont que deux termes : en ne se servant que de lignes droites & de cercles*

Soit donnée l'égalité du troisiéme degré $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$; je la multiplie par x pour l'élever au quatriéme & transposant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 \mp 2apxx = aaqx$; j'ajoûte de part & d'autre $aapp$ pour faire que le premier membre soit un quarré, ce qui me donne $x^4 \mp 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx \mp ap$

$= a\sqrt{pp + qx}$; transposant enfin ap, & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qx}}$. Je considere à present que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie x, je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple c; il s'ensuit 1°. Que c surpasse $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$. 2°. Que $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$ sera encore plus grande que la juste valeur de x. Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

Si l'égalité du troisiéme degré a $+ 2apx$, il est clair que $c^4 + 2apcc$ * $> aaqc$, d'où il vient en ajoûtant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-dessus, $c > \sqrt{-ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Mais lorsqu'il y a $-2apx$, on aura en transposant $2apx$ & divisant par x cette égalité $xx = 2ap + \frac{aaq}{x}$, d'où il suit que si l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour x une valeur c plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$, la quantité $2ap + \frac{aaq}{c}$ sera moindre que le quarré xx (puisque $\frac{aaq}{c}$ est moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus forte raison que le quarré cc. On aura donc $cc > 2ap + \frac{aaq}{c}$, & multipliant par cc, il vient $c^4 - 2apcc > aaqc$, d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire) $c > \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Or ceci supposé, je forme cette suite: $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$, $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qf}}$, $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qg}}$ &c, dans laquelle f exprime le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qc}}$ qui le précede immediatement, & de même g exprime le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qf}}$ &c.

* Ce signe ainsi tourné veut dire, surpasse.

Il est donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette suite seront plus grands que la juste valeur de la vraie racine x, & qu'ils en approchent

prochent toûjours de plus en plus. Je dis à present que si on la continuë à l'infini, le terme infinitiéme (s'il est permis de s'exprimer ainsi) ou le dernier terme de cette suite, sera précisément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë x. Car soit z ce dernier terme, il est certain par la nature de la suite qu'il approchera de plus prés de l'inconnuë x que tous les autres termes, & qu'ainsi le terme $V\overline{+ap-+aV\overline{pp-+qz}}$ qui le suivroit immediatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puisque s'il étoit moindre il approcheroit de plus prés de l'inconnuë x, & seroit par consequent le dernier terme, ce qui est contre la supposition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la suite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui soit égal, & on aura par consequent $z = V\overline{+ap-+aV\overline{pp-+qz}}$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $z^4 \pm 2apz - aaq = 0$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raisonnement semblable, que si l'on prend une grandeur c plus petite que la juste valeur de x, tous les termes de cette suite iront toûjours en augmentant en sorte que le dernier sera précisément égal à la valeur cherchée de x. Voici maintenant comment on peut construire par Geometrie cette suite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra sur l'une d'elles les parties $AB = a$, $AD = p$, du même côté du point A lorsqu'il y a $+2apx$, & de part & d'autre lorsqu'il y a $-2apx$, comme on le suppose dans ces deux figures; & sur l'autre les parties $AC = q$, $AP = c$, toûjours de part & d'autre de point A. Ayant décrit du diametre CP un demi cercle qui coupe AD en E, on prendra sur AC la partie AF égale à AE, & on portera sur AD depuis le point D vers le point A dans le premier cas, & vers le côté opposé dans le FIG. 236. 237.

second, la partie DG égale à DF. On décrira enfin du diametre BG un demi cercle qui coupe AP en Q, je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Car à cause du demi cercle CEP la ligne AE ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cause du triangle rectangle FAD l'hypothenuse FD ou $DG = \sqrt{pp + qc}$, & par consequent $AG = p + \sqrt{pp + qc}$, & à cause du demi cercle BQG la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Nommant à present AQ, f; & réïterant la même operation en se servant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$, & ensuite par le moyen de AR que j'appelle g, on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qg}}$ en réïterant encore la même operation : de sorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes AP, AQ, AR, AS, &c. qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de la vraie racine x de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il est à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour $AP(c)$ telle grandeur que l'on veut, car si cette grandeur se trouve plus grande que la racine x, les autres lignes AQ, AR, AS, &c. vont toûjours en diminuant ; & au contraire si AP est moindre que x, elles iront en augmentant : de sorte que la vraie racine est renfermée entre AP de l'une de ces deux figures & AP de l'autre, AQ & AQ, AR & AR, AS & AS. D'où l'on voit qu'en formant deux suites convergentes, dans l'une desquelles le premier terme soit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toûjours en prenant les termes correspondans de ces deux suites, des limites entre lesquelles se doit trouver cette racine ; de sorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. Nommant m la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'est pourquoi divisant cette égalité par $x - m$, la division se fera au juste (car le reste $m^3 - 2apm - aaq = 0$, puisqu'on suppose $x = m$), & on aura pour quotient l'égalité $xx + mx + mm - 2ap = 0$, dont la resolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troisiéme degré peuvent se reduire à l'une ou à l'autre de ces deux formes ; car aprés avoir fait évanoüir le second terme, s'il y avoit $+ aaq$ en mettant $- aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où l'on voit que les constructions précedentes suffisent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troisiéme degré. Passons maintenant au quatriéme.

Soit proposée l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = 0$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enseigner, les racines approchées de l'égalité du troisiéme degré

$$\begin{aligned} y^3 - 3ppy &+ 2p^3 = 0 \\ + 4ary &+ 8apr \\ &- aqq \end{aligned}$$

où l'on doit observer d'écrire $- 2p^3$ lorsqu'il y a dans la proposée $+ 3apxx$; $- 4ar$ lorsqu'il y a $+ a^3r$; & enfin $- 8apr$ lorsque les signes des termes $3apxx$ & a^3r sont differens. Je regarde ensuite l'une de ces racines approchées y comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne $v = \sqrt{ay \mp 2ap}$, sçavoir $+ 2ap$ lorsqu'il y a $- 3apxx$, & $- 2ap$ lorsqu'il y a $+ 3apxx$; j'ai pour les quatre racines approchées de la proposée, celles de ces deux égalités du second degré $xx - vx + \frac{ay \mp ap}{2} - \frac{aaq}{2v} = 0$ & $xx + vx + \frac{ay \mp ap}{2} + \frac{aaq}{2v} = 0$ (en observant de prendre $- ap$ lorsqu'il y a $- 3apxx$ dans l'égalité proposée, & $+ ap$ lorsque c'est $+ 3apxx$) que l'on construira aisément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'est qu'une suite de la regle que donne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa

Yy ij

Geometrie pour reduire toute égalité du quatriéme degré à une du troisiéme, de laquelle connoissant une des racines, on a les quatre de la proposée; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le supposer ici comme démontré. En voici cependant la raison en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = 0$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = 0$ & $xx + vx + ab + ac = 0$, dans lesquelles les lettres v, a, b, c, marquent des inconnuës qui doivent être déterminées dans la suite, en sorte que le produit de ces deux égalités qui est $x^4 \substack{-vvxx \\ +2abxx} - 2acvx \substack{+aabb \\ -aacc} = 0$, soit en effet l'égalité même proposée. Pour cela j'en compare les termes correspondans, & j'ai 1°. $c = \frac{aq}{2v}$. 2°. $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = 0$; c'est à dire en mettant pour b & pour c les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^6 - 6apv^4 \substack{+9aappvv \\ +4a^3rvv} - a^4qq = 0$. Et si l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la substitution l'égalité du troisiéme degré

$y^3 \substack{-3ppy \\ +4ary} \substack{+2p^3 \\ +8apr \\ -aqq} = 0$, de laquelle connoissant une racine y, on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de v, & ensuite celles de b & de c, lesquelles étant mises dans les deux égalités planes que l'on a supposées d'abord, on en formera deux autres dont le produit sera l'égalité même proposée, & dont la resolution par consequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit question que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatriéme degré, on pourroit la trouver immediatement par une suite en cette sorte.

Soit $x^4 \pm 2apxx - aaqx - a^3r = 0$, on trouvera en operant de même que pour le troisiéme degré $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp + ar}}$, ce qui donne, en faisant pour abreger $pp + ar = nn$, cette suite conver-

gente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qc}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qf}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qg}}$, &c, dont la construction n'est differente des precedentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 \pm 2apxx - aaqx + a^3r = 0$, on trouveroit $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$, & on formeroit lorsque pp surpasse ar (en faisant $pp - ar = nn$) la même suite convergente que ci-dessus. Mais il est à remarquer que lorsqu'il y a $+ 2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx + pp - ar}$ surpasse p afin que $\sqrt{-ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de la racine vraie x ne renferme point de contradiction ; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par consequent il faudra prendre c plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si pp est moindre que ar, l'on formera alors, en faisant $ar - pp = qn$, cette suite convergente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qc - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qf - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qg - qn}}$, &c, où l'on doit remarquer que lorsqu'il y a $- 2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que x surpasse n ou $\frac{ar - pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de x ne renferme point de contradiction, & qu'ainsi on doit prendre c plus grand que n.

Il peut arriver lorsqu'il y a $+ r$ dans l'égalité donnée que ces racines soient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en construisant la suite ; car on n'a démontré qu'elle est convergente qu'en supposant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reste la construction de la derniere suite est un peu differente des autres, mais comme elle n'est pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette methode devient embarrassée lorsqu'on la veut étendre à des égalités complettes qui passent le quatrié-

me degré; c'est pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquiéme degré qui n'a que deux termes, & qui servira de methode pour les autres plus composées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4b = o$; multipliant par x, & transposant il vient $x^6 = a^4bx$, & extrayant la racine quarrée on aura $x^3 = aa\sqrt{bx}$ ou $x^4 = aax\sqrt{bx}$, & extrayant de nouveau deux fois de suite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a\sqrt{x\sqrt{bx}}}$; ce qui fournit cette suite convergente, c, $\sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$, $\sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, $\sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$, &c, dont voici la construction geometrique.

FIG. 238. Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra sur l'une d'elles la partie $AB = a$, & sur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point A. Du diametre PC ayant décrit un demi-cercle qui coupe BA prolongée du côté de A en D, & ayant pris sur AC la partie $AF = AD$, on décrira du diametre PF un autre demi-cercle qui coupe AD en E. On décrira enfin du diametre BE un troisiéme demi-cercle qui coupe AP en Q; il est visible que $AQ = \sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$. Nommant à present AQ, f; & rëiterant la même operation en se servant de AQ aulieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, & de même $AS = \sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$. Et les droites AP, AQ, AR, &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de l'inconnuë x de l'égalité donnée $x^5 - a^4b = o$. Cela se prouve de la même maniere que pour les égalités du troisiéme degré.

M. Bernoulli celebre Professeur des Mathematiques à Bâle, est l'Auteur de ces suites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipsic de l'année 1689, page 455.

PROPOSITION XIII.

Problême.

424. UNE *portion de Section conique étant donnée, trouver par son moyen les racines d'une égalité donnée du troisiéme ou du quatriéme degré.*

On a vû dans le Problême précedent qu'une égalité du quatriéme degré étant donnée, on en peut toûjours trouver une du troisiéme, de laquelle connoissant une racine on a les quatre de la proposée; en ne se servant que de lignes droites, & de cercles. On sçait de plus que toute égalité du troisiéme degré se peut réduire sous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont l'une des racines est vraie, & les deux autres ou fausses ou imaginaires. Cela posé; soit $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée *BD* d'une Parabole, qui a pour axe la ligne *CH* dont l'origine est au point *C*. Des points *B*, *D*, extremités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires *BG*, *DH*, sur l'axe, il est manifeste que si la vraie racine étoit plus grande que *BG*, & moindre que *DH*, le cercle décrit du centre *E*, trouvé comme l'on a enseigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de second terme, & du rayon *EC*, couperoit infailliblement la portion *BD* en quelque point *M*; d'où menant la perpendiculaire *MQ* sur l'axe, cette ligne *MQ* en seroit la vraie racine. Il est donc question lorsque ce cercle ne coupe point la portion *BD*, de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine soit renfermée entre les limites *BG*, *DH*. Pour le faire, je nomme les données *BG*, *f*; *DH*, *g*; & je suppose que l'on ait deux limites *m*, *n*, entre lesquelles la vraie racine *x* soit resserrée (*m* est moindre que *n*, & *f* moindre que *g*). Ce qui donne *x* plus grand que *m* & moindre que *n*, & multipliant chaque terme par *f* & divisant FIG. 239.

par m, il vient $\frac{fz}{m}$ plus grand que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. Si l'on fait à present $z=\frac{fx}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, à la place de x sa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 \mp \frac{2apff}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, qui aura sa vraie racine $z=\frac{fx}{m}$ plus grande que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. D'où il suit que si les limites m, n, étoient telles que $\frac{fn}{m}$ fût égale ou moindre que g, il n'y auroit qu'à construire cette derniere égalité selon l'article 387. pour avoir sa vraie racine MQ (z) par le moyen de la portion donnée BC. De là on tire la construction suivante.

On fera par le Problême précedent deux suites convergentes qui approcheront l'une en dessus & l'autre en dessous de la vraie racine x de l'égalité donnée $x^3 \pm 2apx - aaq = 0$. On choisira deux termes correspondans dans ces deux suites m, n, qui soient tels que $\frac{fn}{m}$ soit égale ou moindre que g; ce qui se pourra toûjours faire, puisque f est moindre que g, & que la difference qui est entre m & n diminuë continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 + \frac{2apff}{mm} z - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, dont l'inconnuë sera $z=\frac{fx}{m}$; & en la construisant selon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée BC en un point M; duquel ayant mené sur l'axe la perpendiculaire MQ, elle sera la vraie racine z de cette seconde égalité: & faisant ensuite $x=\frac{mz}{f}$, cette ligne x sera la vraie racine de l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorsqu'elles ne sont pas imaginaires; il n'y a qu'à la

la divifer par l'inconnuë x moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaiffer à une du fecond degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en fe fervant de l'article 380.

Tout ceci eft trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai feulement que fi la portion donnée *BD* étoit d'une Ellipfe ou d'une Hyperbole, il faudroit fe fervir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté fe réduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données : & c'eft ce que l'on feroit comme dans la Parabole.



LIVRE DIXIE'ME.

Des Problêmes déterminés.

PROPOSITION GENERALE.

425. UN *Problême de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la solution.*

On regardera d'abord le Problême proposé comme s'il étoit resolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes (qui sont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou semblables) par des lettres de l'Alphabet, sçavoir les lignes qui sont connuës par les premieres lettres, & les lignes inconnuës par les dernieres lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problême, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple & le plus naturel qu'il sera possible: ce qui doit servir à former autant de differentes égalités qu'il y a d'inconnuës. On employera enfin les regles ordinaires de l'Algebre pour réduire ces differentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnuë, & pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré; & l'ayant resoluë par les regles prescrites dans le Livre précedent, on en tirera la solution cherchée du Problême. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

FIG. 240. 426. LA ligne droite *AB* étant donnée, trouver hors de cette ligne le point *C* tel qu'ayant mené les droites *AC*, *CB*; 1°. La somme de leurs quarrés soit au triangle *ACB* en la raison donnée de *f* à *g*, 2°. L'angle *ACB* qu'elles comprennent soit égal à l'angle donné *GDK*.

Je ſuppoſe que le point C ſoit celui qu'on cherche, & je mene CH perpendiculaire ſur AB que je diviſe par le milieu au point E. Je nomme la donnée AE ou EB, a; & les inconnuës EH, x; HC, y; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cauſe des triangles rectangles AHC, BHC, les quarrés des hypothenuſes $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par conſequent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puiſque le triangle $ACB = AE \times CH\ (ay)$, il s'enſuit par la premiere condition du Problême que $2aa + 2xx + 2yy . ay :: f . g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g} y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reſte maintenant à accomplir la ſeconde condition, ſçavoir que l'angle ACB ſoit égal à l'angle donné GDK. Pour y réüſſir, je mene d'un point G pris à diſcretion dans la droite GD, la perpendiculaire GF ſur le côté DK, prolongée, s'il eſt neceſſaire, & du point A la perpendiculaire AL ſur le côté BC prolongé auſſi, s'il eſt neceſſaire, afin d'avoir deux triangles rectangles ſemblables ACL, GDF, dont l'un GDF eſt donné. Cela fait, je nomme les données DF, b; FG, c; & faiſant, pour abreger, $BC = n$, je trouve à cauſe des triangles rectangles ſemblables BCH, BAL, ces proportions $BC\,(n) . CH\,(y) :: BA\,(2a) . AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC\,(n) . BH\,(a + x) :: BA\,(2a) . BL = \frac{2aa + 2ax}{n}$. Et par conſequent CL ou $BL - BC = \frac{2aa + 2ax - nn}{n}$. Donc puiſque l'angle ACL doit être égal à l'angle GDF, il faut que $CL\left(\frac{2aa + 2ax - nn}{n}\right) . AL\left(\frac{2ay}{n}\right) :: DF\,(b) . FG\,(c)$; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$; c'eſt à dire, en mettant pour nn ſa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette ſeconde

équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la seconde condition du Problême.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnuës, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problême ; il ne faut plus que se servir des regles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renferme qu'une inconnuë y ou x : & c'est ce qu'on peut faire en cette sorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour seconde, $aac - cxx - cyy = 2aby$ ou $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$; c'est pourquoi ajoûtant ensemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux seconds, je trouve $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$. Et mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'une ou l'autre des équations précedentes, je trouve $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$; d'où je connois que si mm étoit moindre que $aa + ff$ le Problême seroit impossible. En voici la construction.

FIG. 241. Par le point E milieu de AB ayant tiré une perpendiculaire indéfinie ON à AB, on menera par le point A la ligne AM qui fasse avec AB l'angle EAM égal à l'angle DGF qui est donné. Du point M où cette ligne rencontre la perpendiculaire ON, comme centre, & du rayon MA, on décrira un arc de cercle ACB. On prendra ensuite sur EM prolongée du côté de M la partie $MN = m$; & ayant joint NA, on lui menera la perpendiculaire AO qui rencontre NO au point O, par lequel on tirera une parallele à AB. Je dis que cette parallele rencontrera l'arc de cercle ACB au point cherché C.

Car ayant mené CH perpendiculaire sur AB, il est clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puisqu'à cause des triangles rectangles semblables NEA, AEO, il vient NE $(m+f)$. AE (a) :: AE (a). $EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à

cause du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 = aa + ff$; & partant puisque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'ensuit à cause du triangle rectangle MCO que $\overline{CO}^2$ ou $\overline{EH}^2$ $(xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm+2mf+ff}$. Donc &c.

REMARQUE.

427. LORSQU'APRE'S avoir satisfait à toutes les questions d'un Problême, on est arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnuës; il n'est pas necessaire, si l'on veut, de les réduire à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnuë, comme il est prescrit dans la proposition generale: mais l'on peut resoudre le Problême, en construisant séparément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'intersection serviront à trouver les valeurs de ces deux inconnuës. C'est ce qui se voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnuës les droites EH (x), HC (y) qui font entr'elles un angle droit EHC; & où aprés avoir satisfait aux conditions requises, on est arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en font les lieux étant décrits séparément donneront par leurs intersections des points qui satisferont: voici comment.

Ayant décrit comme dans la premiere construction l'arc de cercle ACB, on décrira du centre A, & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire EM en P. On prendra sur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côté de l'arc ACB, & on décrira du centre Q & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc ACB en des points C qui satisferont.

Car à cause de ce dernier cercle on aura $\overline{QC}^2$ ou $\overline{EP}^2$ $(mm - aa) = \overline{QO}^2$ $(mm - 2my + yy) + \overline{OC}^2$ (xx), c'est à dire la premiere équation $aa + xx + yy = 2my$;

& à cause de l'autre cercle ACB il vient $\overline{MC}^2$ ou $\overline{MA}^2$ $(ff+aa)=\overline{MO}^2(ff+2fy+yy)+\overline{OC}^2(xx)$, c'eſt à dire, la ſeconde équation $aa-xx-yy=2fy$. D'où il ſuit que le point cherché C ſe doit trouver en même temps ſur ces deux cercles, c'eſt à dire, qu'il doit ſe confondre avec leurs points d'interſection.

Il eſt viſible qu'il y a deux differens points C qui ſatisfont à la queſtion, lorſque ces deux cercles ſe coupent en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un, lorſqu'ils ſe touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir aucun, lorſqu'ils ne ſe coupent ni ne ſe touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en reſolvant un Problême par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une conſtruction plus composée que ſi étant arrivé à une ſeule égalité qui ne renferme qu'une inconnuë x, on l'eut conſtruite ſelon les regles du Livre précedent. Je m'explique: qu'il faille, par exemple, reſoudre un Problême (c'eſt le troiſiéme exemple qui ſera propoſé) dont les conditions ſoient renfermées dans ces deux équations $y=\frac{cd-cx}{b}$, & $\frac{bb}{ff}yy=aa+xx$; ſi l'on ſe ſervoit des lieux de ces deux équations, il eſt clair qu'il faudroit mener une ligne droite * qui ſeroit le lieu de la premiere équation, & décrire une Hyperbole * qui ſeroit le lieu de la ſeconde, pour avoir par leurs interſections les valeurs des deux inconnuës x & y. Mais parce qu'en réüniſſant ces deux équations en une ſeule, on trouve l'égalité du ſecond degré $xx-\frac{2ccd}{cc+ff}x+\frac{ccdd-aaff}{cc-ff}=0$, qui ſe conſtruit en n'employant que des lignes droites & des cercles; ce ſeroit une faute conſiderable de ſe ſervir d'une Hyperbole.

* Art. 306.
* Art. 330. & 332.

EXEMPLE II.

Fig. 242. 428. LE quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener d'un de ſes angles A la ligne droite AE, en ſorte que ſa partie FE compriſe entre les côtés BC, CD, oppo-

ſés à cet angle ſoit égale à une ligne donnée b.

Je ſuppoſe que le point E pris ſur le côté DC prolongé, ſoit tel que la partie FE de la ligne AE ſoit égale à b, c'eſt à dire que je ſuppoſe la queſtion reſoluë ; & je nomme la donnée AB ou AD ou DC ou CB, a ; l'inconnuë DE, x. Cela fait, les triangles ſemblables EDA, ECF, donnent $ED\ (x).\ DA\ (a) :: EC\ (x-a).\ CF = \frac{ax-aa}{x}$, & le triangle rectangle ECF donne $\overline{FE}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2 = xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx}$. Mais puiſque par la condition du Problême FE doit être égale à b, on aura $xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx} = bb$, ou $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = 0$. D'où l'on voit que la reſolution de cette égalité doit fournir pour $DE\ (x)$, une valeur telle que menant la droite AE, ſa partie FE compriſe entre les côtés CB, DC, ſoit égale à la donnée b.

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatriéme degré, il faudroit employer pour la reſoudre une Section Conique. C'eſt pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algebre, ſi elle ne ſe peut point abaiſſer à un degré plus ſimple, & je trouve en effet que ſi l'on prend $cc = aa + bb$, elle ſera le produit des deux égalités $xx + aa - ax - cx = 0$, & $xx + aa - ax + cx = 0$, qui ſont chacune du ſecond degré ; de ſorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 2ax^3$ &c, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités. Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité $xx + aa - ax + cx = 0$; parce que c ſurpaſſant a, la diſpoſition des ſignes me fait connoître qu'elles ſont toutes deux fauſſes : mais je trouve celles de l'autre égalité $xx + aa - ax - cx = 0$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui ſuit.

Soit priſe ſur le côté AB prolongé la partie $BG = c$, & ſoit décrit du diametre AG un demi-cercle qui cou-

pe en E le côté DC prolongé. Je dis que ce point sera celui qu'on cherche.

Car nommant DE, x; & menant la perpendiculaire EH, on aura $HG = a + c - x$, & par la proprieté du cercle $AH \times HG\,(ax + cx - xx) = \overline{EH}^2\,(aa)$.

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRE'S avoir satisfait aux conditions d'un Problême, on arrive à une égalité composée qui a plusieurs racines réelles, il est visible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnuë qu'on cherche: mais on doit bien remarquer que les autres peuvent aussi servir à la resolution de la question, dans un sens qui ne peut être different de celui qu'on s'est imaginé que dans quelques circonstances particulieres. Ainsi dans cet exemple la petite racine vraie $DL\,(x)$ de l'égalité $xx - ax - cx + aa = 0$, donne sur le côté DC un point L tel qu'ayant mené la droite AL qui rencontre le côté BC prolongé en K, sa partie LK est égale à la donnee b. De même si l'on prend $Bg = c$ sur le côté BA prolongé vers A, & qu'on décrive du diametre Ag un demi-cercle, il coupera le côté CD prolongé vers D aux points e, l, en sorte que De, & Dl seront les deux racines fausses de l'égalité $xx + cx - ax + aa = 0$: & si l'on mene les droites Ae, Al, qui rencontrent le côté CB prolongé aux points f, k; les droites ef, lk, seront encore chacune égale à la donnée b. De là on peut voir que quoiqu'en resolvant le Problême on n'ait eu en vûë que de trouver la valeur de DE, on est cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs DL, De, Dl, qui ont toutes servi à resoudre le Problême en quelque sens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problême se peut abaisser à un moindre

moindre degré, il est à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a suivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive souvent qu'elles conduisent à des égalités plus simples, & que d'ailleurs il est assés difficile d'abaisser des égalités composées. Voici deux autres manieres de resoudre le Problême précedent qui pourront servir à faire comprendre cette remarque.

Ayant supposé le Problême resolu, je mene EG perpendiculaire sur AE qui rencontre le côté AB prolongé en G, & je prends pour inconnuës les deux droites AF & BG que je nomme y & z. Cela fait, les triangles rectangles semblables ABF, AEG, donnent AB (a). AF (y) :: AE ($y+b$). AG ($a+z$). Et partant $yy+by = aa+az$. Or comme j'ai deux inconnuës & que le Problême est déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je considere que $EG=AF$ (y); car menant EH perpendiculaire sur AG, le triangle rectangle EHG est semblable au triangle rectangle ABF, & de plus égal, puisque les côtés homologues AB, EH, sont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cause du triangle rectangle AEG) cette autre égalité $aa+2az+zz=yy+2by+bb+yy=2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ sa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la premiere égalité, il vient $aa+2az+zz=2aa+2az+bb$ qui se reduit à cette égalité trés-simple $z=\sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même construction que ci-dessus. FIG. 242.

AUTRE MANIERE.

La maniere suivante a cela de particulier qu'elle réüssit également soit que la figure $ABCD$ soit un quarré, ou qu'elle soit un rhombe. Ayant mené par le point cherché F, que je regarde comme donné, la ligne FG qui fasse avec AF l'angle AFG égal à l'angle donné ACE, & qui rencontre au point C la diagonale AC prolongée autant qu'il est necessaire; on aura trois triangles ACE, AFG, FIG. 243.

GCF, qui seront semblables entr'eux. Car 1°. L'angle en A étant commun aux deux triangles ACE, AFG, & les angles ACE, AFG, étant égaux par la supposition; il est visible que ces deux triangles seront semblables. 2°. Le triangle ADC étant isoscelle, l'angle DCA ou ECG sera égal à l'angle DAC ou ACF, & ajoûtant de part & d'autre le même angle FCE, l'angle FCG sera égal à l'angle ACE ou AFG; & partant puisque l'angle en G est commun, les deux triangles AGF, FGC, seront semblables. Cela posé, soient les inconnuës $CE = x$, $AG = z$, & les données $DC = a$, $FE = b$, $AC = c$; on aura (à cause des paralleles AD, CF,) cette proportion: $CE(x) . FE(b) :: CD(a) . AF = \frac{ab}{x}$. Or à cause des triangles semblables ACE, AFG, GCF, on trouvera $AC(c) . CE(x) :: AF\left(\frac{ab}{x}\right) . FG = \frac{ab}{c}$. Et $AG(z) . FG\left(\frac{ab}{c}\right) :: \frac{ab}{c} . CG(z - c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette construction.

FIG. 243. Ayant mené du point A perpendiculairement sur AC la ligne $AH = \frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu L de la diagonale AC la ligne HL, & on prendra sur cette diagonale prolongée du côté de C la partie LG égale à LH. On décrira ensuite du centre G & du rayon GF égal à AH, un arc de cercle qui coupera le côté BC au point cherché F. Cela est évident; puisque par la construction $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$, & que $GF = \frac{ab}{c}$.

EXEMPLE III.

FIG. 244. 431. TROUVER sur une ligne droite indéfinie DE donnée de position, deux points D, E; desquels ayant mené à deux points donnés O, C, hors de cette ligne, les droites DO, OE, DC, CE; l'angle DOE soit droit

& l'angle DCE égal à un angle donné TPS.

Supposons la chose faite, je décris du diametre DE un demi-cercle qui passera par le point O, puisque l'angle DOE est droit; & sur la corde DE je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel passera par consequent par le point C. Du point H centre de cet arc, & des points donnés O, C, je mene sur DE les perpendiculaires HK, OA, CB, & je nomme les données OA, a; CB, b; AB, c; les inconnuës AK, x; KH, y. Cela posé, il est clair par les Elemens de Geometrie, 1°. Que le point K sera le milieu de la ligne DE, & par consequent le centre du demi-cercle DOE. 2°. Que si par le sommet P de l'angle donné TPS on mene une perpendiculaire PQ à l'un des côtés PT, l'angle QPS qu'elle fait avec l'autre côté PS, sera égal à l'angle KEH. Or à cause du triangle rectangle KAO le quarré $\overline{KO}^2$ ou $\overline{KE}^2 = aa + xx$, & à cause du triangle rectangle HKE le quarré $\overline{HE}^2 = aa + xx + yy$: mais prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre en R une parallele CR à DE, on aura (à cause du triangle rectangle CRH) le quarré $\overline{CH}^2 = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puisque les lignes HE, HC, sont rayons du même cercle, on formera par la comparaison de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abreger, faisant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, se reduit à celle-ci; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on considere le chemin qu'on a suivi pour arriver à l'équation précedente, on verra qu'elle renferme cette condition, sçavoir que les cercles décrits des centres K, H, & des rayons KO, HC, se rencontrent sur la ligne DE dans les mêmes points D, E; de sorte qu'il ne reste plus qu'à faire que l'angle KEH soit égal à l'angle QPS. Pour en venir à bout.

Ayant pris sur la ligne PQ la partie PQ égale à CB, & tiré QS parallele au côté PT, & terminée en S par

l'autre côté PS; il est évident que le triangle rectangle EKH doit être semblable au triangle rectangle PQS, & qu'ainsi, en nommant la donnée QS, f, on aura cette proportion; $EK(\sqrt{aa+xx}).KH(y)::PQ(b).QS(f)$; d'où l'on tire $y=\frac{f}{b}\sqrt{aa+xx}=\frac{cd-cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve $xx-\frac{2ccd}{cc-ff}x+\frac{ccdd-aaff}{cc-ff}=o$, dont l'une des racines fournira pour $AK(x)$ une valeur telle que décrivant un cercle du centre K & du rayon KO, il coupera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

On peut trouver les racines de cette égalité, selon les articles 380. ou 382. (Liv. préced.): mais quoique les methodes qu'on y explique soient trés-simples eû égard à leur generalité, il arrive neanmoins trés-souvent qu'en considerant avec attention la nature d'une question particuliere, on trouve des constructions plus faciles. Par exemple, on peut remarquer ici, 1°. Que si par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire FG qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on aura $AG=d$; car nommant AG, z; les triangles rectangles GAO, GBC, donneront $\overline{GO}^2=zz+aa$ & $\overline{GC}^2=zz+2cz+cc+bb$, & comparant ensemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puisque le point G est dans la perpendiculaire FG qui divise par le milieu la ligne OC, il vient $zz+aa=zz+2cz+cc+bb$, d'où l'on tire $AG(z)=\frac{aa-bb-cc}{2c}=d$. 2°. Que l'égalité $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$ qui renferme les conditions du Problême, se reduit à cette proportion; $GK(d-x).KO(\sqrt{aa+xx})::QS(f).AB(c)$: de sorte que si l'on
* Art. 350. décrit * le lieu de tous les points K tels qu'ayant mené aux deux points donnés G, O, les droites KG, KO, elles soient toûjours entr'elles en la raison donnée de

QS à AB; ce lieu coupera la ligne DE au point cherché K. Ce qui donne la construction suivante qui est trés-simple.

Par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire FG, qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on divisera la ligne OG au point M, en sorte que $GM. MO :: QS. AB$. Et on la prolongera du côté de G jusqu'au point N, en sorte que $GN. NO :: QS. AB$. Du diametre MN on décrira un cercle qui coupera la ligne DE en un point K, duquel point comme centre, & du rayon KO ayant décrit un cercle; ce cercle rencontrera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

Comme le cercle qui a pour diametre la ligne MN, coupe la droite DE non seulement au point K, mais encore en un autre point L; il s'ensuit qu'on peut se servir du point L de même que l'on a fait du point K, pour trouver sur la ligne DE deux autres points qui satisferont également, & qu'ainsi cette question peut avoir deux differentes solutions.

Si l'angle DCE devoit être droit aussi-bien que l'angle DOE, il est clair que QS (f) deviendroit nulle, & qu'ainsi l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ se changeroit en celle-ci $cd - cx = o$, d'où l'on tire $x = d$; c'est à dire que le centre K tomberoit alors sur le point G. Et si le point B tomboit sur le point A, l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ se changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx} = \frac{aa-bb}{2}$, en mettant pour cd sa valeur $\frac{aa-bb-cc}{2}$, & effaçant ensuite les termes où c (qui devient en ce cas nul) se rencontre; d'où l'on voit que dans ce cas, si du point O comme centre, & du rayon $OK = \frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K. Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre second, & la construction generale peut servir à trouver tout d'un coup dans une Ellipse dont

deux diametres conjugués sont donnés, deux autres diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle donné ; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

FIG. 245. 432. TROIS points A, B, C, étant donnés, en trouver un quatriéme M, duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC; les differences de l'une d'elles aux deux autres soient données.

Cette question est susceptible de trois differens cas. Car ou les trois lignes MA, MB, MC, sont toutes égales entr'elles ; ou il y en a seulement deux qui soient égales entr'elles ; ou enfin toutes les trois sont inégales entr'elles.

Premier cas. Lorsque les trois lignes MA, MB, MC, sont égales entr'elles ; ou ce qui est la même chose lorsque les deux differences données sont nulles. Il est clair que le point cherché M sera le centre du cercle qui passe par les trois points donnés A, B, C.

FIG. 246. *Second cas* Lorsque deux des trois lignes MA, MB, MC, comme MA, MB, doivent être égales entr'elles ; ou (ce qui est la même chose) lorsqu'une des differences données est nulle.

Ayant tiré du point donné C, la perpendiculaire CO sur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B; du point M que l'on suppose être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ, paralleles à CO, OB; il est clair que AP sera égale à PB, puisque AM doit être égale à MB. Nommant donc les données AP ou PB, a; OP, b; OC, c; $AM-MC$, f; & les inconnuës AM, z; PM, y; les triangles rectangles APM, MQC, donneront ces deux égalités $zz=aa+yy$, & $zz-2fz+ff=cc-2cy+yy+bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la seconde de ceux de la premiere, il vient $2fz-ff=aa-cc+2cy-bb$, qui se reduit à cette proportion $z . y+\frac{aa-bb-cc+ff}{2c} :: c . f$. De là on tire la construction suivante.

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB, la perpendiculaire $PD = \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothenuse AD prolongée du côté qu'il sera necessaire, aux points E, F; en sorte que $AE.ED::c.f$, & $AF.FD::c.f$. Du diametre EF soit décrit un cercle; il coupera la ligne PD au point cherché M.

Car ayant mené la droite MA, il est clair par la proprieté du cercle EMF,* que AM (z). MD $\left(y+\frac{aa-bb-cc+ff}{2c}\right)::c.f$; & par la proprieté de la perpendiculaire PM, que $zz=aa+yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problême, il s'ensuit &c. * Art. 350.

Si par l'autre point N, où la ligne DP rencontre la circonference, on mene les droites NA, NB, NC; les deux NA, NB, seront égales entr'elles, & la difference de chacune de ces deux droites à la troisiéme NC sera égale à la donnée f; de sorte que le point N satisfait aussi, mais avec cette difference que NC est la plus grande des trois droites NA, NB, NC, au lieu que MC est la plus petite des trois MA, MB, MC.

On peut encore resoudre ce second câs sans aucun calcul. Je suppose comme auparavant que M soit le point cherché, & ayant tiré les droites MA, MB, MC, je décris du centre C, & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEKFH$. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mene aux deux points donnés A, B, les droites DA, DB qui rencontrent le cercle aux points E, F; par où je tire les rayons EC, CF, & la corde EF. Cela fait, puisque $MC+CD$ ou $MD=MA$, & que les lignes CD, CE, sont rayons d'un même cercle, les triangles DMA, DCE, seront isoscelles; & par consequent semblables parce que l'angle en D est commun: c'est pourquoi les lignes CF, MA, seront paralleles. On prouvera de même que les lignes CF, MB, seront aussi paralleles; ce qui donne $DA.DE::DM.DC::DB.DF$. Et de là on voit que toute la difficulté FIG. 147.

ſe reduit à trouver ſur la circonference du cercle *DEKFH*, le point *D* tel qu'ayant mené les droites *DA*, *DB*, qui rencontrent la circonference aux points *E*, *F*; la corde *EF* ſoit parallele à la ligne *AB*. Or cela ſe peut faire ainſi.

Ayant décrit du point *C* un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré *AC* qui rencontre ce cercle aux points *K*, *H*; on prendra ſur *AB* la partie *AG* quatriéme proportionnelle à *AB*, *AH*, *AK*; & on menera du point *G* la tangente *GE* au cercle *EDHFK*. Ayant mené par le point touchant *E* la ligne *AE* qui rencontre le cercle au point *D*, on tirera *DC*, ſur laquelle on prendra le point *M* tel que *DM*. *DC* :: *DA*. *DE*. Je dis qu'il ſera celui qu'on cherche.

Car par la proprieté du cercle *DEKFH* le rectangle $HA \times AK = DA \times AE$; Et par conſequent *BA*. *AD* :: *AE*. *AG*: c'eſt pourquoi les triangles *DAB*, *GAE*, qui ont l'angle en *A* commun, & les côtés autour de cet angle reciproquement proportionnels, ſeront ſemblables. L'angle *AEG* ſera donc égal à l'angle *ABD*; mais cet angle *AEG* étant fait par la tangente *EG* & par la corde *DE* prolongée du côté de *E*, a pour meſure la moitié de l'arc *DE*. Il ſera donc égal (en tirant par le point *F* où la ligne *DB* rencontre la circonference, la corde *EF*) à l'angle *DFE*; & par conſequent les lignes *FE*, *AB*, ſeront paralleles entr'elles. Or par la conſtruction *DC*. *DM* :: *DE*. *EA* :: *DF*. *FB*. Les triangles *DMA*, *DMB*, ſeront donc iſoſcelles; puiſque les triangles *DCE*, *DCF*, qui leur ſont ſemblables ſont iſoſcelles. Les lignes *AM*, *MB*, ſeront donc égales chacune à *DM*, & par conſequent entr'elles; & de plus *AM* ou *DM* ſurpaſſera *MC* de la grandeur donnée *CD*. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

FIG. 248. *Troiſiéme cas*. Lorſque les trois lignes *MA*, *MB*, *MC*, ſont inégales entr'elles. Du point donné *C*, je mene la perpendiculaire *CO* ſur la ligne *AB* qui joint les deux autres points donnés; & du point *M*, que je ſuppoſe

ſuppoſe être celui qu'on demande, les perpendiculaires MP, MQ, ſur les lignes AB, CO. Je nomme les données AO, a; OB, b; CO, c; $AM-MB, d$; $AM-MC, f$; & les inconnuës OP, x; PM, y; AM, z: ce qui donne $AP = a + x$, $BP = b - x$, $CQ = c - y$, $BM = z - d$, $CM = z - f$. Par le moyen des triangles rectangles APM, BPM, CQM, je trouve les trois équations ſuivantes; la premiere, $zz = aa + 2ax + xx + yy$; la deuxiéme, $zz - 2dz + dd = bb - 2bx + xx + yy$; la troiſiéme, $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernieres de ceux de la premiere, je forme une quatriéme, & une cinquiéme équation; ſçavoir la quatriéme, $2dz - dd = aa - bb + 2ax + 2bx$, & la cinquiéme, $2fz - ff = aa - cc + 2ax + 2cy$. Je mets dans la premiere équation à la place de yy le quarré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquiéme; & enſuite à la place de x ſa valeur trouvée par le moyen de la quatriéme, & à la place de xx le quarré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnuës que la ſeule z qui ne monte qu'au quarré. C'eſt pourquoi on la pourra toûjours reſoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enſeigné dans les articles 380, ou 382 (Liv. préced.) Or ayant la valeur de l'inconnuë z, il eſt facile de trouver le point cherché M; car il ſera dans l'interſection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point A, & pour rayon la ligne AM (z); & l'autre pour centre le point B, & pour rayon la ligne BM ($z - d$).

On voit aſſés qu'en achevant le calcul, on ſeroit arrivé à une égalité du deuxiéme degré qui auroit renfermé dans ſes termes des quantités trés-compoſées; de ſorte que pour les reünir ſous des expreſſions ſimples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit beſoin d'un grand nombre d'operations; ce qui rendroit la conſtruction trés-longue. C'eſt pourquoi on ſe ſervira de celle-ci par le moyen de laquelle on reduit ce cas au précedent.

FIG. 249. Les deux droites AB, AC, qui joignent les points donnés étant divisées par le milieu aux deux points D, F, & ayant mené du point M que je suppose être celui qu'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ, sur ces deux lignes; on nommera les données AB, $2a$; BC, $2b$; $AM - MB$, $2c$; $AM - MC$, $2d$; & les inconnuës DP, x; FQ, y. Cela posé, si l'on nomme $2t$ la somme inconnuë des deux droites AM, BM; la plus grande AM sera $t + c$ & la moindre BM sera $t - c$. Or les triangles rectangles APM, BPM, donnent $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$ c'est à dire en termes analytiques $tt + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = tt - 2ct + cc - aa + 2ax - xx$, d'où l'on tire $t = \frac{ax}{c}$; & par consequent $AM\,(t + c) = \frac{ax}{c} + c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM, que $AM = \frac{by}{d} + d$; ce qui, en comparant ensemble les deux valeurs de AM, donne cette équation $\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d$, ou $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f$, en faisant pour abreger $d - c = f$. D'où il est clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ, sur les deux droites AB, AC; on ait cette équation $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x.\ y + \frac{df}{b} :: b.\ \frac{ad}{c}$. Or cela suffit pour trouver la construction suivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC, & divisé ces droites par le milieu aux points D, F; on prendra sur AC du côté du point A la partie $FK = \frac{df}{b}$; & ayant tiré sur AB, AC, les perpendiculaires DO, KS, qui se rencontrent au point H, on menera dans l'angle OHS la droite HM qui soit le lieu des points M, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux

les perpendiculaires MO, MR, sur les côtés HO, HS; la droite MO soit toûjours à la droite MR, en la raison donnée de b à $\frac{ad}{c}$. Ensuite l'on tirera AE perpendiculaire sur HM, & l'ayant prolongée en G en sorte que EG soit égale à AE, on trouvera par le second cas le point M, tel qu'ayant mené les droites MA, MG, MC; les deux MA, MG, soient égales entr'elles, & la difference de MA à MC soit la donnée $2d$. Je dis qu'il satisfera à la question.

Car par la proprieté de la droite HM, on aura toûjours MO ou $DP(x)$. MR ou $QK\left(y+\frac{df}{b}\right) :: b.\frac{ad}{c}$; & par consequent le point M se doit trouver dans cette ligne. Il sera donc également éloigné des points A, G; mais de plus la difference de AM à MC doit être la donnée $2d$. Donc &c.

REMARQUE.

433. Si au lieu que dans cet exemple, les deux differences de l'une de ces trois droites MA, MB, MC, aux deux autres sont données; on vouloit à present que ce fussent les deux sommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la somme de l'une d'elles avec une autre & la difference de la même avec la troisiéme: la question n'en deviendroit pas plus difficile, & on pourroit toûjours la resoudre par les mêmes methodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laisser quelque chose à l'industrie des Lecteurs.

COROLLAIRE I.

434. De là on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car soient les points A, B, C, les centres des cercles donnés, & le point M celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points D, E, F, du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons FIG. 250.

des cercles donnés $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$; & le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou $MF = z$. Cela posé, on aura $AM = z + a$, $MB = z + b$, $MC = z - c$; & partant $AM - MB = a - b$, $MB - MC = b + c$, $AM - MC = a + c$. D'où il est évident que la question se reduit à trouver un point M, duquel ayant mené aux trois points donnés A, B, C, les droites MA, MB, MC, leurs differences soient données.

COROLLAIRE II.

FIG. 251. 252. 435. DE LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, qui passe par deux autres points donnés B, C, & qui touche une ligne droite DE donnée de position.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés F, B, C, tombent du même côté de la droite indéfinie DE; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251. *Premier cas.* Ayant mené FD perpendiculaire sur DE, & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF; on tirera les droites FB, FC. On trouvera le point M tel que la difference de AM & BM soit égale à FB, & celle de AM & MC égale à FC. On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points F, M, & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à AM. Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* Def. 1. II. & 1. III.

Car 1°. Le point E où la ligne AM rencontre la droite DE est à la Section, puisque FE étant égale à AF, on aura dans l'Ellipse la somme des droites FE, EM, & dans l'Hyperbole la difference égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points B, C, seront aussi dans la Section. 2°. Par la construction les angles FED, DEA, sont égaux entr'eux; & par consequent la ligne ED est * tangente en E.

* Art. 60. & 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer *M* du même côté du foyer donné *F* par rapport à ligne *DE*, la Section qu'on trouve est une Ellipse ; au lieu qu'elle sera une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées, lorsqu'on le cherchera de l'autre côté.

Second cas. Il est évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipse qui satisfasse, mais seulement deux Hyperboles opposées. Pour les trouver ; ayant mené comme dans le premier cas *FD* perpendiculaire sur *DE*, & l'ayant prolongée en *A* en sorte que *DA* soit égale à *DF* ; on cherchera le point *M* tel que la somme de *AM* & *BM* soit égale à la donnée *FB*, & la difference de *AM* & *MC* soit égale à la donnée *FC*. On décrira enfin deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyers les deux points *F*, *M*, & dont le premier axe soit égal à *AM*. Je dis qu'elles ont les conditions requises. FIG. 252.

Car 1°. Le point *E*, où la ligne *AM* rencontre la ligne *DE*, sera à l'une de ces deux Hyperboles, puisque *FE* étant égale à *AE*, la difference des droites *FE*, *ME*, sera égale à *AM* valeur du premier axe ; & par la même raison les points *B*, *C*, seront à ces Hyperboles. 2°. La ligne *DE* sera * tangente en *E*, puisque par la construction les angles *AED*, *DEF*, sont égaux entr'eux.

* Art. 123.

Si le point *C* tomboit du même côté du point *B* par rapport à la ligne *DE*, la somme des deux droites *AM* & *MC* seroit égale à la donnée *FC* ; au lieu que c'est la difference lorsque les points *B*, *C*, tombent de part & d'autre de la ligne *DE*, comme l'on a supposé dans cette figure.

Si l'on proposoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de position, & qui passât par un autre point donné ; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point *A*, desquels ayant mené deux droites qui aboutissent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur difference ou leur somme avec celle qui part du

point où doit passer la Section & qui aboutit au même foyer, sera toûjours donnée : de sorte qu'on pourra toûjours resoudre la question par le moyen de l'Exemple précedent, & de sa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de position, & qui eût pour foyer un point donné; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points comme l'on a fait le point A par le moyen de la ligne DE dans les deux cas précedens, & le centre du cercle qui passeroit par ces trois points, seroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit observer dans tous ces differens cas, que si le point cherché M étoit infiniment éloigné du point F; la Section deviendroit alors une Parabole dont les diametres seroient paralleles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

EXEMPLE V.

FIG. 253. 436. UNE Parabole NCS étant donnée avec un de ses arcs MN; trouver un autre arc RS qui soit à l'arc MN, en raison donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de son origine C jusques en A, en sorte que CA soit égal à la moitié de son parametre, & décrit une Hyperbole équilatere EAF qui ait pour centre le point C & pour la moitié de son premier axe la ligne CA; on menera parallement à l'axe CA les droites MB, NE, RD, SF, qui rencontrent le second axe aux points H, L, K, O, & l'Hyperbole aux points B, E, D, F, desquels on tirera sur les Asymptotes les perpendiculaires BP, EQ, DG, FI. Cela fait, il est visible que le rectangle $AC \times MN$ ou * le Trapese hyperbolique $HBEL$ est égal au Secteur hyperbolique CBE plus le triangle CLE moins le triangle CHB; & de même que $AC \times RS = CDF + COF - CKD$. Or supposant que la raison donnée de l'arc

* Art. 246.

MN à l'arc RS soit comme m est à n, les lettres m & n expriment des nombres entiers quelconques) on aura par la condition du Problême $AC \times MN$ ou $CBE + CLE - CHB . AC \times RS$ ou $CDF + COF - CKD ::$ $m . n$, & par consequent $nCBE + nCLE - nCHB = mCDF + mCOF - mCKD$. Si donc l'on nomme les données CP, b; CQ, c; l'inconnuë CG, x; & qu'on prenne $CI = x\sqrt{\frac{cc}{bb}}$, il est clair * que le Secteur hyperbolique $CBE . CDF :: m . n$, & qu'ainsi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité précedente se change en celle-ci $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ qui ne renferme plus d'espaces hyperboliques, mais seulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques. * Art. 223.

Les droites CP, HB, forment en s'entrecoupant au point V deux triangles rectangles VHC, VPB, qui sont semblables; puisque les angles en V étant opposés au sommet sont égaux; ce qui donne $HV . CV :: VP . VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV \times VB = CV \times VP$. De plus à cause de l'Hyperbole équilatere EAF, l'angle VCA ou CVH * est demi droit, & par consequent le triangle rectangle CHV est isoscelle, aussi-bien que son semblable VPB, ce qui donne $VP = PB$, $CH = HV$, & $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2\overline{HV}^2$. Donc le quadruple du triangle rectangle CHB, c'est à dire $2CH \times HB = 2HV \times \overline{HV + VB} = 2\overline{HV}^2 + 2HV \times VB = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, puisque $\overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2$ est le quarré de $CV + VP$ ou de CP. Et par consequent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}\overline{PB}^2$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ}^2 - \frac{1}{4}\overline{QE}^2$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG}^2 - \frac{1}{4}\overline{GD}^2$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI}^2 - \frac{1}{4}\overline{IF}^2$. C'est pourquoi nommant aa la puissance de l'Hyperbole, * Def. 16. III.

on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^4}{4bb}$, le triangle $CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$, le
* Art. 101. triangle $COF = \frac{xx}{4}\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$; puisque * $PB = \frac{aa}{b}$, $QE = \frac{aa}{c}$, $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$: & mettant ces valeurs à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera celle-ci $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4}m \times xx\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} - xx + \frac{a^4}{xx}$ qui se reduit, en operant selon les regles ordinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxiéme degré $x^4 - \frac{na^4 - nbbcc \times cc - bb \times \sqrt[m]{b^{2n}}}{mbbcc \times \sqrt[m]{c^{2n}} - \sqrt[m]{b^{2n}}} xx + a^4\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} = o$, dont la resolution doit fournir pour $CG\,(x)$ une valeur telle qu'en prenant $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, & tirant les perpendiculaires GD, IF, qui rencontrent l'Hyperbole équilatere aux points D, F; l'arc RS que les paralleles DR, FS à l'axe coupent sur la Parabole, sera à l'arc MN en la raison donnée de n à m.

Il est à propos de remarquer, 1°. Que le second terme de cette egalité est toûjours negatif, parce que $CQ\,(c)$ surpasse $CP\,(b)$; & qu'ainsi ces deux racines seront toutes deux vraies ou toutes deux imaginaires, selon que la moitié de la grandeur connuë au second terme est plus grande ou moindre que $aa\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$ racine quarrée du dernier terme: ce qui est une suite de la resolution des égalités du second degré. 2°. Que $\overline{CG}^2\,(xx)$ étant une des racines de cette égalité, $\overline{IF}^2$ en sera l'autre. Car puisque
* Art. 101. $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il s'ensuit * que $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$. Or on sçait que le dernier terme d'une égalité, est le produit de ses racines. Si donc on divise le dernier terme $a^4\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ de

l'égalité

l'égalité précedente, par le quarré $\overline{CG}^2$ (xx) que l'on suppose être l'une de ses deux racines; l'autre sera $\frac{a^4}{xx}\sqrt{\frac{m\,b^{2n}}{c^{2n}}}$ qui est le quarré de FI. D'où l'on voit que si l'on prend sur les deux Asymptotes les parties CG, CT, égales aux deux racines de l'égalité précedente; & qu'ayant tiré les paralleles GD, TF, aux Asymptotes, on mene par les points D, F, où elles rencontrent l'hyperbole équilatere EAF, les paralleles DR, FS, à l'axe: elles couperont sur la Parabole l'arc cherché RS.

Si $m=n$, l'équation generale se changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc - a^4}{cc}xx + \frac{a^4bb}{cc} = 0$, dont les deux racines fournissent $CG\,(x) = b = CP$, & $CT\,(x) = \frac{aa}{c} = QE$; d'où il suit qu'on trouve par leur moyen un arc RS, semblablement posé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc MN. Or comme l'on sçait d'ailleurs * que les deux arcs RS, MN, étant semblablement posés de part & d'autre de l'axe sont égaux entr'eux, cela sert à confirmer les raisonnemens que l'on vient de faire. De là il est aisé de conclure qu'un arc parabolique MN étant donné, on n'en peut trouver aucun autre RS qui soit plus proche ou plus éloigné de l'origine C de l'axe & qui lui soit égal; sans supposer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique. *Art. 86.

Si $m=1$ & $n=2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4bb - 2ccb^4}{c^4 + bbcc}xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = 0$; & si $m=2$ & $n=3$, ou, ce qui est la même chose, si l'arc RS doit être à l'arc MN comme 3 est à 2, on trouvera $x^4 - \frac{\overline{3a^4 - 3bbcc} \times \overline{bcc - b^3}}{2c^3 - 2ccb^3}xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = 0$; & la resolution de ces égalités fournira celle du Problême. Il en est de même des autres valeurs de m & n.

M. *Bernoulli* celebre Professeur des Mathematiques à Groningue, a resolu le premier ce Problême d'une maniere differente de celle-ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipsic de l'année 1698. p. 261.

EXEMPLE VI.

437. Un angle BAC étant donné avec un point D au dedans de cet angle ; décrire un cercle qui passe par le point donné D, qui touche le côté AB en quelque point P, & qui coupe sur l'autre côté AC une partie OC égale à une ligne donnée $2a$.

Fig. 254.

Ayant supposé le Problême resolu, on menera du point donné D, la ligne DA qui passe par le sommet A de l'angle donné, la ligne DP qui passe par le point touchant P & rencontre en H le côté AC prolongé, la ligne DE parallele à AC, & la perpendiculaire DB sur le côté AB : & ayant divisé la partie interceptée $OC(2a)$ par le milieu en Q, on nommera les inconnuës AP, x ; AQ, z ; DH, t ; & les données AE, m ; AB, g ; BD, b ; DE, f ; AD, n. Cela fait, on aura par la proprieté du cercle, $\overline{AP}^2\ (xx) = CA \times AO$ ou $\overline{AQ}^2\ (zz) - \overline{QO}^2\ (aa)$, & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles semblables PED, PAH, donnent $AE\ (m).\ AP\ (x) :: DH\ (t).\ HP = \frac{tx}{m}$. Et $PE\ (m-x).\ ED\ (f) :: AP\ (x).\ AH = \frac{fx}{m-x}$. Donc $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$ & $CH \times HO$ ou $\overline{HQ}^2 - \overline{QO}^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2}$ (en mettant pour zz sa valeur $xx + aa$) $= DH \times HP\ \left(\frac{ttx}{m}\right)$ par la proprieté du cercle ; c'est à dire qu'en divisant par x, on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2} = \frac{tt}{m}$. Or PD ou $DH - HP = \frac{mt - tx}{m}$; & (à cause du triangle rectangle DBP) son quarré $\frac{mmtt - 2mttx + ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn ; d'où l'on tire $\frac{tt}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{\overline{m-x}^2} = x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2}$, & multipliant par $m-x$, &

transposant le terme $\frac{ffx}{\overline{m-x}^{2}}$, il vient $mx - xx + 2fz = \frac{mxx - 2gmx - ffx + mnn}{m-x} = \frac{mxx - mmx - nnx + mnn}{m-x}$, puisque à cause du triangle rectangle DEB on trouve $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$: c'est à dire, parce que la division se fait au juste, $mx - xx + 2fz = -mx + nn$ ou $2fz = xx - 2mx + nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour zz sa valeur $xx + aa$, on aura cette égalité

$$\begin{array}{l} x^4 - 4mx^3 + 4mmxx - 4mnnx + n^4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad - 4ff \qquad\qquad\quad - 4aaff \\ \qquad\qquad\quad + 2nn \end{array}$$

qui est du quatriéme degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra doivent fournir pour AP (x) des valeurs telles que menant PM perpendiculaire sur AP, tirant PD, & faisant l'angle PDM égal à l'angle DPM, le point M, où se rencontrent les côtés DM, PM du triangle isoscelle DPM, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite MP ou MD. Ou bien si l'on prend sur le côté AB la partie $AP = x$, & sur l'autre côté AC la partie $AQ = \sqrt{xx + aa}$, & qu'on mene sur ces côtés les perpendiculaires PM, QM; le point M où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les differens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même verité; je vais donner une autre maniere de resoudre cette question, qui me paroît encore plus naturelle que la précedente.

Ayant supposé que le point M soit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires MP, MQ, sur les côtés de l'angle donné BAC, & les paralleles MF, MG, à ces côtés; & du point donné D, on tirera les paralleles DB, DE, DK, à MP, MF, AB. On nommera ensuite les données DB, b;

BE, c; DE, f; AB, g; AE, m; AD, n; & les inconnuës AP, x; PM ou MD, y; & on aura PB ou $DK = g - x$, $MK = y - b$: ce qui donne (à cauſe du triangle rectangle MKD) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ ſa valeur nn. Or à cauſe des triangles ſemblables DBE, MPF, on a cette proportion $DB\,(b).\ BE\,(c) :: PM\,(y).\ PF = \frac{cy}{b}$, & partant AF ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cauſe des triangles ſemblables DBE, MQG, $DE\,(f).\ DB\,(b) :: MG\,\left(\frac{bx - cy}{b}\right).\ MQ = \frac{bx - cy}{f}$; Donc puiſque par les conditions du Problême, il faut que QC moitié de la partie interceptée OC ſoit égale à la ligne donnée a, & que les droites MC & MP ſoient rayons d'un même cercle cherché; il vient $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = \overline{MP}^2\,(yy)$, & multipliant par ff on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour ff ſa valeur $bb + cc$, c'eſt à dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ ſa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + nn}{2}$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin ſi l'on met pour $g - c$ ſa valeur m, on trouvera la même égalité que ci-deſſus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

Voici encore une nouvelle maniere de reſoudre cette queſtion, qui donne d'abord une conſtruction fort aiſée; mais qui demande la deſcription de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné D une ligne droite MD, & ſur la ligne AB donnée de poſition la perpendiculaire MP; ces deux lignes MD, MP, ſoient toûjours
* Art. 1. égales entr'elles: & je vois ſans aucun calcul que c'eſt *

la Parabole qui a pour foyer le point D, & pour directrice la ligne AB. 2°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui passe par le point donné D; ce cercle coupe sur la ligne AL donnée de position, la partie OC égale à une ligne donnée $2a$. Je mene à cet effet du point donné D la perpendiculaire DL sur AL, & d'un des points cherchés M que je regarde comme donné, les perpendiculaires MR, MQ, sur DL, AL: & ayant nommé les inconnuës & indéterminées DR, x; RM, y; qui font entr'elles un angle droit DRM, & la connuë DL, b; j'ai à cause du triangle rectangle MRD le quarré $\overline{MD}^2 = xx + yy$, & à cause du triangle rectangle MQC le quarré $\overline{MC}^2 = \overline{MQ}^2 (bb - 2bx + xx) + \overline{QC}^2 (aa)$. Or les lignes MD, MC, étant rayons du même cercle sont egales entr'elles, & par conséquent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on construit la Parabole qui est le lieu de cette équation, il est visible qu'elle passera par le centre M du cercle qu'on demande : mais la Parabole qui a pour foyer le point D & pour directrice la ligne AB devant aussi passer par ce centre, il s'ensuit que le centre du cercle cherché se trouvera dans l'intersection de ces deux Paraboles.

EXEMPLE VII.

438. Un cercle qui a pour centre le point A & pour rayon la droite AM, étant donné, avec deux points E, F, sur le même plan; trouver sur la circonference au dedans de l'angle EAF, le point M tel qu'ayant mené les droites AM, EM, FM; les deux angles AME, AMF, soient égaux entr'eux. FIG. 255.

Si les lignes AE, AF, étoient égales entr'elles, il est visible que la ligne qui diviseroit par le milieu l'angle EAF, couperoit la circonference dans le point qu'on demande. C'est pourquoi on supposera que ces deux lignes sont inégales, & même pour éviter la confusion

que c'eſt la ligne AE qui eſt moindre que la ligne AF. Or cela poſé, je reſouds ce Problême en deux differentes manieres.

PREMIERE MANIERE.

Ayant ſuppoſé que le point M ſoit celui qu'on cherche, on menera les droites MB, MD, qui faſſent ſur AF, AE, des angles MBA, MDA, égaux aux angles AMF, AME, & par conſequent entr'eux ; & à cauſe des triangles ſemblables AFM, AMB, & AEM, AMD, on aura ces deux proportions $AF. AM :: AM. AB$. Et $AE. AM :: AM. AD$. Donc puiſque les lignes AF, AE, ſont données avec le rayon AM, les parties AB, AD, des droites AF, AE, le feront auſſi. Maintenant, ſi l'on mene les droites MP, MQ, paralleles à AE, AF ; les triangles BPM, DQM feront ſemblables, puiſque les angles APM, AQM, ſont égaux, comme auſſi les angles PBM, QDM, complemens à deux droits des angles égaux, MBA, MDA ; & partant ſi l'on nomme les données AB, a ; AD, b ; & les inconnuës AP ou QM, x ; PM ou AQ, y ; on aura $BP\,(x-a).\ PM\,(y) :: DQ\,(y-b).\ QM\,(x)$ :: ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation

* *Art.* 336. $xx-ax=yy-by$, ou $yy-by-xx+ax=0$, dont le lieu eſt * une Hyperbole équilatere qui ſe conſtruit ainſi.

Soient priſes ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM : ſoit tirée par le point C milieu de BD une ligne droite indéfinie CH parallele à AB, ſur laquelle ſoit priſe la partie $CK=\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ (la ligne $AD\,(b)$ ſera plus grande que $BA\,(a)$, puiſqu'on a ſuppoſé que AE eſt moindre que AF) : ſoit décrite une Hyperbole équilatere qui ait pour centre le point C, & pour la moitié d'un ſecond diametre la droite CK, dont les ordonnées HM ſoient paralleles à AD. Je dis qu'elle rencontrera la circonference du cercle donné, au point cherché M.

Car menant CL parallele à AD, il eſt clair que les

lignes CH, CL, diviseront par le milieu les droites AD, AB, aux points O, L; puisque le point C coupe en deux parties egales la ligne BD, & qu'ainsi CH ou $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$, HM ou $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$. Or par la proprieté de l'Hyperbole équilatere, $\overline{HM}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy - by + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy - by = xx - ax$, qui étant reduite en proportion, donne $BP\ (x-a).\ PM\ (y) :: DQ\ (y-b).\ QM\ (x)$. Donc puisque les angles BPM, DQM, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont proportionnels, les triangles BPM, DQM, seront semblables, & par consequent l'angle MBP sera égal à l'angle MDQ, & leurs complemens à deux droits ABM, ADM, seront égaux. Mais puisque $AB.\ AM :: AM.\ AF$, & $AD.\ AM :: AM.\ AE$, les triangles ABM, AMF, & ADM, AME, seront semblables. L'angle ABM sera donc egal à l'angle AMF, & l'angle ADM à l'angle AME; & par consequent les angles AMF, AME, seront égaux entr'eux, puisqu'on vient de prouver que les angles ABM, ADM, le sont.

On prouvera de même que l'Hyperbole opposée à celle-ci coupera la circonference au dedans de l'angle opposé au sommet à l'angle EAF, en un point M tel qu'ayant mené les droites AM, ME, MF; les angles AME, AMF, seront égaux entr'eux: comme aussi que ces deux Hyperboles équilateres opposées couperont la circonference au dedans des angles qui sont à côté de ces deux-ci, chacune en un point M tel qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; l'angle AME sera égal au complement à deux droits de l'angle AMF.

Si l'on prend sur CL la partie CG égal à CK, il est clair * que CG sera la moitié du premier diametre conjugué à CK, & qu'ainsi * l'une des Asymptotes de ces deux Hyperboles sera parallele à KG. Or dans le triangle isoscelle GCK, l'angle externe GCO ou son égal BAD vaut les deux internes opposés, c'est à dire le dou-

* Def. 16. III.
* Art. 114.

ble de l'angle CGK. Donc puiſque les lignes CG, AD, ſont paralleles, il s'enſuit que la ligne KG & par conſequent l'une des Aſymptotes ſera parallele à la ligne qui diviſe par le milieu l'angle DAB. De plus il eſt évident que la ligne AD eſt une double ordonnée au ſecond diametre CK, puiſque $\overline{OD}^2$ ou $\overline{OA}^2$ $(\frac{1}{4}bb) = \overline{CO}^2$ $(\frac{1}{4}aa) + \overline{CK}^2$ $(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa)$; & qu'ainſi l'une des Hyperboles équilateres oppoſées paſſe par le point D, & l'autre par le point A. Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle conſtruction qui eſt plus ſimple que la précedente: la voici.

FIG. 256. Ayant pris ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera par le point de milieu C de la ligne BD deux droites indéfinies CH, CK, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à la ligne AP, qui diviſe par le milieu l'angle donné EAF. On décrira enſuite entre ces deux lignes comme Aſymptotes, par les points D, A, deux Hyperboles oppoſées, qui couperont la circonference du cercle donné en des points M tels qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; les deux angles AME, AMF, ſeront égaux entr'eux lorſque le point d'interſection M tombe dans l'angle EAF ou dans ſon oppoſé au ſommet; & l'angle AME ſera égal au complement à deux droits de l'angle AMF lorſqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'eſt arrivé à cette derniere conſtruction qu'en ſuppoſant la premiere qui eſt fondée ſur le calcul, & en faiſant enſuite des remarques qui ſont aſſés recherchées. Il eſt cependant facile de la démontrer tout d'un coup, ſi l'on fait attention à une proprieté de l'Hyperbole équilatere qui ſe trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs ſe peut aiſément prouver. Car ſi l'on mene du point M où l'Hyperbole équilatere DM rencontre la circonference du cercle donné, aux deux extremités B, D, du premier diametre BD, les droites

BM, DM,

BM, DM, qui rencontrent l'Asymptote CH aux points O, L, & la ligne AP qui lui est parallele aux points S, R; il est clair selon cet article, que MO est égal à ML, & qu'ainsi l'angle MOL ou MSR ou BSA est égal à l'angle MLO ou DRA. Mais par la construction l'angle BAS est égal à l'angle DAR, puisque la ligne AP divise par le milieu l'angle EAF. Partant les angles restans ABM, ADM, dans les deux triangles ABS, ADR, seront égaux entr'eux; d'où il suit que les angles AMF, AME, le sont aussi. Et c'est ce qui étoit proposé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette derniere construction, une égalité trés-simple qui ne renferme qu'une seule inconnuë, & dont la construction qui se pourra faire par telle Section conique qu'on voudra suivant les regles prescrites dans le Livre précedent, fournira la resolution du Problême. Soit menée à cet effet du point M la ligne MP parallele à l'Asymptote CK, & qui rencontre l'autre Asymptote CH au point H; & soient nommées les données AM, a; AK, b; CK, c; & les inconnuës AP, x; PM, y. Cela posé, on aura par la proprieté du cercle l'équation $xx+yy=aa$, & par la proprieté des Hyperboles opposées * l'autre équation $CH \times HM$ $(xy-cx-by+bc)=CK \times KA$ (bc); ce qui donne $xy-cx-by=o$, d'où l'on tire $y=\frac{cx}{x-b}$. Mettant le quarré de cette valeur à la place de yy dans la premiere équation $xx+yy=aa$, & operant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatriéme degré

$$\begin{array}{l} x^4-2bx^3+bbxx+2aabx-aabb=b. \\ \qquad\qquad\qquad +cc \\ \qquad\qquad\qquad -aa \end{array}$$

* Art. 100.

Or si l'on mene du centre C des Hyperboles perpendiculairement à AC la ligne CG qui rencontre la circonference au point G; les triangles rectangles ACG, AKC, donneront $\overline{CG}^2=\overline{AG}^2-\overline{AC}^2=\overline{AM}^2$ $(aa)-\overline{AK}^2$ (bb) $-\overline{CK}^2$ (cc). C'est pourquoi nommant la donnée CG, m;

Ddd

on changera l'égalité précédente en celle-ci $x^4 - 2bx^3 - mmxx + 2aabx - aabb = 0$, dans laquelle les données sont le rayon $AM(a)$, les lignes $AK(b)$, $CK(c)$, $CG(m)$, & l'inconnuë x exprime des valeurs de AP telles que menant les perpendiculaires PM, elles rencontreront la circonference aux points cherchés.

Pour distinguer entre les deux points ou chaque perpendiculaire PM coupe la circonference du cercle, celui qui sert à la question presente; il faut observer de mener PM du côté où l'on a supposé que tomboit le point M par rapport à la ligne AP en faisant le calcul, lorsque sa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvée ci-dessus est positive, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & plus grande que b, ou bien lorsqu'elle est fausse; & au contraire il la faut mener du côté opposé, lorsque sa valeur est negative, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & moindre que b.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. 257. Ayant mené par le point cherché M que l'on regarde comme donné la droite MD perpendiculaire au rayon AM, & par le point D où elle rencontre AF la droite GH parallele à AM, laquelle rencontre en H la ligne MF, & en G la ligne EM prolongée qui coupe en C la droite AF; on aura à cause des triangles semblables FAM, FDH, cette proportion: $AM.\ DH :: AF.\ FD$. Et à cause des triangles semblables CAM, CDG, cette autre, $AM.\ DG :: AC.\ CD$. Or la ligne DG est égale à DH, puisque par la condition du Problême les angles AME, AMF, devant être égaux, les angles DMH, DMG, le seront aussi. Donc $AF.\ FD :: AC.\ CD$; & $AF + FD.\ AF :: AC + CD$ ou $AD.\ AC$. Cela posé, soient menées EB, MP, perpendiculaires sur AF, & MQ perpendiculaire sur EB: & soient nommées les données AM, a; AB, b; BE, c;

AF, d; & les inconnuës AP, x; PM, y. Les triangles rectangles semblables APM, AMD, donneront AP (x). $AM(a)::AM(a)$. $AD=\frac{aa}{x}$. Et partant $FD=d-\frac{aa}{x}$; & les triangles semblables EQM, MPC, donneront EQ ou $EB-MP$ $(c-y)$. QM ou $AP-AB$ $(x-b)::MP(y)$. $PC=\frac{xy-by}{c-y}$. Donc AC ou $AP+PC=\frac{cx-by}{c-y}$, & mettant dans la proportion précedente $AF+FD$. $AF::AD$. AC à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx-aacx-2bdxy+aaby+aady=aadc$, qui se reduit en divisant par $2cd$, & en faisant (pour abreger) $b+d=f$, à cette autre $xx-\frac{b}{c}yx-\frac{aa}{2d}x+\frac{aaf}{2cd}y-\frac{1}{2}aa=0$, dont le lieu qui est une Hyperbole entre ses Asymptotes étant construit selon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonference du cercle au point cherché M.

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnuë x, on se servira de l'équation au cercle $xx+yy=aa$, dans laquelle mettant à la place de yy le quarré de y trouvée par le moyen de l'équation précedente, on arrivera à une égalité du quatriéme degré qui ne renfermera que l'inconnuë x, & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée AP.

EXEMPLE VIII.

439. UN cercle qui a pour centre le point A étant donné avec deux autres points E, F; trouver sur la circonference le point M tel qu'ayant mené les droites AM, MF, ME; le sinus droit de l'angle AMF soit au sinus droit de l'angle AME, en la raison donnée de m à n. FIG. 258.

Je resouds cette question en trois differentes manieres.

PREMIERE MANIERE.

Ayant pris ſur les droites données AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera du point cherché M que l'on regarde comme donné les droites MB, MD, les perpendiculaires MG, MH, ſur AF, AE, & les paralleles MP, MQ, à AE, AF. Ayant pris ſur BM la partie BK égale à DM, on tirera du point K les droites KO, KL, paralleles à MG, MP, & du point donné D la perpendiculaire DC ſur AF. Cela fait, les triangles ſemblables BMG, BKO, donnent $BM.\ BK$ ou $DM :: MG.\ KO$. Or par la condition du Problême $m.\ n :: KO.\ MH$; puiſque prenant DM pour rayon ou ſinus total, les droites KO, MH, ſeront les ſinus droits des angles MBF, MDE, ou de leurs complemens à deux droits MBA, MDA, égaux par la conſtruction aux angles AMF, AME. Donc en multipliant par ordre les antecedens & les conſequens de ces deux proportions, on aura $m \times BM.\ n \times MD :: MG \times KO.\ KO \times MH :: MG.\ MH :: MP.\ MQ$. à cauſe des triangles ſemblables MPG, MQH. Cela poſé.

On nommera les données AD, a; AC, b; CD, c; AB, d; AM, n; & les inconnuës AP ou MQ, x; PM ou AQ, y; & les triangles ſemblables ADC, PMG, QMH donneront $PG = \frac{by}{a}$, MG $MG = \frac{cy}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, GB ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, DH ou $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$: & à cauſe des triangles rectangles BGM, DHM, on aura $\overline{BM}^2$ ou $\overline{BG}^2 + \overline{GM}^2 = xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa} - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd + \frac{ccyy}{aa} = xx + \frac{2b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd$ en mettant pour

$bb + cc$ sa valeur aa à cause du triangle rectangle ACD; & de même $\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or par la proprieté du cercle, le quarré $\overline{AM}^2$ $(rr) = \overline{AG}^2 \left(xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa}\right) + \overline{GM}^2 \left(\frac{ccyy}{aa}\right) = xx + \frac{2b}{a}xy + yy$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa. Si donc l'on substituë dans les valeurs de $\overline{BM}^2$ & de $\overline{DM}^2$ à la place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur rr, & que pour abreger on fasse $rr + dd = ff$ & $rr + aa = gg$, on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM = \sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de BM & de DM dans la proportion $m \times BM . n \times DM :: MP\ (y) . MQ\ (x)$ que l'on a trouvée ci-dessus; & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $mx\sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque membre, & faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrivera à une égalité du sixiéme degré qui ne renfermera plus que l'inconnuë x, & qui étant resoluë selon les regles du Livre précedent, donnera pour AP (x) une valeur telle que menant PM parallele à AE, le point M où cette ligne rencontrera la circonference, sera celui qu'on cherche.

Si l'on suppose que $m = n$, il est évident que les angles MBF, MDE, seront égaux; & qu'ainsi les angles ABM, ADM, ou AMF, AME, le seront aussi. D'où l'on voit que le Problême précedent n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

SECONDE MANIERE.

Ayant joint les deux points donnés E, F, par une FIG. 259.

on formera cette équation $(bny + anx)\sqrt{gg - 2cx - 2ay} = (mcy - max)\sqrt{ff + 2bx - 2ay}$, de laquelle quarrant chaque membre & faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + yy = rr$, on arrivera encore à une égalité du sixiéme degré, dont la resolution fournira pour AP (x) une valeur telle que menant la perpendiculaire PM, elle ira couper la circonference au point cherché M.

C'est à peu prés de cette façon que M. Descartes resoud cette question dans la soixante-cinquiéme de ses Lettres Tom. 3. Elle lui avoit été proposée par M. de Roberval, d'une maniere qui paroît differente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même chose.

TROISIÉME MANIERE.

Soient décrits des diametres AE, AF, deux cercles ART, AST, sur lesquels soient portées depuis le point A deux cordes quelconques AR, AS, qui soient toûjours entr'elles en la raison donnée de m à n; & soient tirées les droites ER, FS, qui s'entrecoupent au point M. Je dis que la ligne courbe AM, qui est le lieu de tous les points M ainsi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre est en A) au point cherché M. FIG. 260.

Car tirant AM & le prenant pour rayon ou sinus total, il est clair que la corde AR est le sinus droit de l'angle AME, & la corde AS le sinus droit de l'angle AMF.

Il est à propos de remarquer 1°. Que cette construction a cela de particulier, qu'elle ne réüssit pas seulement lorsqu'il s'agit de trouver le point M sur la circonference d'un cercle dont le centre est en A, mais encore sur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la maniere que l'on vient d'enseigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il suffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette construction fort aisée. 3°. Que le lieu de tous les points M ainsi trouvés est du quatriéme degré, comme il est facile de voir par le calcul de la seconde maniere, en observant de ne point substituer dans les valeurs de EM & FM à la place de $xx+yy$ le quarré rr que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $\overline{nby+nax}\sqrt{\overline{c-x}^2+\overline{a-y}^2} = \overline{my-max}$ $\sqrt{\overline{b+x}^2+\overline{a-y}^2}$, dont les inconnuës x & y montent au quatriéme degré, lorsqu'elle est délivrée d'incommensurables. 4°. Que ce n'est pas une faute legere en Geometrie, selon M. Descartes, d'employer une ligne courbe trop composée pour resoudre un Problême; de sorte que selon lui, on doit préferer à cette derniere solution les deux précedentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur intersection avec la circonference donnée, le point cherché, ne sont que du troisiéme degré. Il me paroît neanmoins que la facilité d'une construction & sa simplicité peuvent récompenser en quelque sorte ce deffaut, & c'est ce qu'on verra encore dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE IX.

FIG. 161. 440. DIVISER un triangle scalene donné ABC en quatre parties égales, par deux lignes droites DE, FG, qui s'entrecoupent à angles droits au point H.

Si l'on fait attention sur la nature de ce Problême, on verra 1°. Que deux des extremités D, F, des deux droites DE, FG, se trouvent necessairement sur l'un des côtés AC du triangle donné ABC, & que leurs deux autres extremités E, G, se trouvent chacune sur chacun des deux autres côtés BC, BA. 2°. Que les deux points cherchés D, F, doivent avoir deux conditions, dont la premiere est que les lignes DE, FG, qui divisent chacune le triangle ABC en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point

H;

H ; & la ſeconde qu'elles forment avec les deux autres côtés du triangle donné, un quadrilatere $BGHE$ qui ſoit la quatriéme partie du triangle ABC. Cela poſé.

Soient menées ſur le côté AC les perpendiculaires GI, BK, EL, & ſoient nommées les données AC, $2a$; BK, b ; AK, c ; KC, d ; & les inconnuës AF, x ; CD, y. Puiſque le triangle AGF, ou $GI \times \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle $ABC (ab)$, il s'enſuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par la même raiſon $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles ſemblables CBK, CEL, & ABK, AGI, donnent $BK(b)$. $EL \left(\frac{ab}{y}\right) :: CK(d)$. $CL = \frac{ad}{y}$. Et $BK(b)$. $GI\left(\frac{ab}{x}\right) :: AK(c)$. $AI = \frac{ac}{x}$. Et partant DL ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, FI ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles DEL, FGI, ſont ſemblables entr'eux ; puiſque chacun d'eux eſt ſemblable au même triangle FDH, qui eſt rectangle en H ſelon la condition du Problême qui demande que les deux lignes DE, FG, s'entrecoupent à angles droits. On aura donc $EL \left(\frac{ab}{y}\right)$. $LD \left(\frac{yy-ad}{y}\right) :: FI \left(\frac{xx-ac}{x}\right)$. $IG \left(\frac{ab}{x}\right)$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $\overline{xx-ac} \times \overline{yy-ad} = aabb$, qui renferme la premiere condition du Problême ; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à accomplir la ſeconde ; ſçavoir que le trapeſe $BGHE$ ſoit le quart du triangle donné ABC.

Pour en venir à bout. Du point d'interſection H des deux droites DE, FG, ſoient menées aux trois angles du triangle ABC, les lignes HA, HC, HB ; & on aura 1°. $FD (x+y-2a)$. $AF(x) :: FHD(\frac{1}{4}ab)$. $FHA = \frac{abx}{4x+4y-8a}$. Et partant le triangle AHG ou le triangle FGA moins le triangle $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x+4y-8a}$.

2°. $AI\left(\frac{ac}{x}\right).IK\left(\frac{cx-ac}{x}\right)::AG.GB::AHG\left(\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a}\right)$. $GHB=\frac{bxx-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable que le triangle $HEB=$ $=\frac{byy-5aby+2bxy-2abx+4aab}{4x+4y-8a}$. Maintenant ſi l'on ajoûte enſemble les triangles HGB, HEB, on formera le quadrilatere $HGBE$ qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatriéme partie du triangle ABC: ce qui donne pour la ſeconde équation $xx+yy+4xy-8ax-8ay+10aa=0$.

Si l'on fait évanoüir par le moyen de ces deux équations l'inconnuë y, on arrivera à une égalité du huitiéme degré qui renfermera toutes les conditions du Problême, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une ſeule inconnuë x; de ſorte que toute la difficulté eſt reduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'eſt ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troiſiéme degré, comme l'on a enſeigné dans les articles 417, & 418 (Liv. préced.) Mais comme la conſtruction de ces lieux devient fort embarraſſée & d'une longueur inſupportable dans la pratique, à cauſe de la multitude des termes de leurs équations, il eſt beaucoup plus naturel de conſtruire ſéparément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux ſoit du quatriéme degré & par conſequent plus composé, car l'autre n'étant que du ſecond récompenſe ce deffaut, & d'ailleurs la facilité de la conſtruction doit determiner en ſa faveur : voici comment elle ſe fait.

FIG. 262. Ayant mené deux lignes droites indéfinies AB, AC, qui font entr'elles un angle droit BAC; on prolongera BA en E, en ſorte que $AE=\sqrt{ac}$, & CA en F, en ſorte que $AF=\sqrt{ad}$. Ayant pris ſur AC une partie quelconque AP, on décrira du centre E de l'intervalle AP un arc de cercle qui coupe AC en G; & ayant pris AH, en ſorte que le rectangle $HA \times AG$ ſoit égal au triangle donné BAC, on prendra ſur AB la partie

$AQ = FH$. On menera ensuite les droites PM, QM, paralleles à AB, AC, lesquelles s'entrecoupent en un point M ; & ayant trouvé en la même sorte une infinité d'autres points tels que M, on fera passer par tous ces points une ligne courbe KML. Cela fait, on prendra sur la diagonale AD du quarré $ABDC$, qui a pour côté la ligne AC égal au côté AC du triangle donné ABC, les parties $AT = \frac{1}{2} AD$, & $DS = \frac{1}{6} AD$; & on décrira du premier axe TS qui soit à son parametre comme 1 est à 3, une Hyperbole OSR. Je dis à present que si l'on mene du point M où je suppose qu'elle rencontre la ligne courbe KML au dedans du quarré $ABDC$, la perpendiculaire MP sur AC, & qu'on prenne sur le côté AC du triangle ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les points F, D, seront tels qu'ayant mené (ce qui est facile) les deux droites FG, DE, qui divise chacune le triangle ABC en deux parties égales ; elles s'entrecouperont à angles droits, & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant AP, x ; PM, y ; on aura à cause des triangles EAG, FAH, rectangles en A, le quarré $\overline{AG}^2 = \overline{EG}^2 (xx) - \overline{AE}^2 (ac)$, & le quarré $\overline{AH}^2 = \overline{FH}^2 (yy) - \overline{AF}^2 (ad)$. Or puisque par la construction le rectangle $HA \times AG$ est égal au triangle donné $BAC (ab)$, il s'ensuit que $\overline{HA}^2 \times \overline{AG}^2 (\overline{yy - ad} \times \overline{xx - ac}) = aabb$. La ligne courbe KML sera donc le lieu de cette équation qui est la premiere des deux que l'on vient de trouver ; & par consequent sa proprieté sera telle que si l'on mene d'un de ses points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP sur AC, & qu'on prenne sur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE qui divise chacune par le milieu le triangle ABC, s'entrecouperont à angles droits au point H.

De plus si d'un point quelconque M de l'Hyperbole OSR, on mene la perpendiculaire MV sur son premier

axe TS, & qu'on prolonge PM jusqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale AD au point X; les triangles rectangles & isoscelles APX, MVX, donneront $1. \sqrt{2} :: AP$ ou $PX(x)$. $AX = x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}. 1 :: MX(x-y)$. MV ou $VX = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$; & partant AV ou $AX - XV = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Or par la construction $AD = 2a\sqrt{2}$ puisque $AC = 2a$, & par consequent TS ou $DT - DS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc TV ou $AV - AT = \frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$, & VS ou $TV - TS = \frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $TV \times VS \left(\frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+20aa}{6}\right). \overline{MV}^2 \left(\frac{xx-2yx+yy}{2}\right) :: 1. 3$, c'est à dire, comme le premier axe TS est à son parametre: ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx + yy + 4xyy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$. L'Hyperbole OSR en sera donc le lieu, & joüira par consequent de cette proprieté; sçavoir que si l'on mene d'un de ses points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP sur AC, & qu'on prenne sur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE, qui divise chacune par le milieu le triangle ABC, le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puisque le point M se trouve en même temps sur la ligne courbe KML, & sur l'Hyperbole OSR; il s'ensuit que les points D, F, pris sur le côté AC du triangle donné, auront aussi en même temps les deux conditions requises. Et c'est ce qui étoit proposé.

S'il arrivoit que les deux courbes OSR, KML, ne se rencontrassent point au dedans du quarré $ABDC$, ce seroit une marque infaillible qu'on auroit fait une supposition fausse, sçavoir que les deux extremités D, F, se rencontrent sur le côté AC. C'est pourquoi il fau-

droit les suppoſer ſur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faiſant des raiſonnemens ſemblables aux précedens, pour avoir une conſtruction par rapport à ce nouveau côté. Mais ſi l'on fait les trois remarques ſuivantes, il ſera aiſé de prévoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui ſur lequel tombent les deux extremités D, F, afin d'avoir ſûrement une ſolution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La premiere eſt que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa - ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa - ad} + ac$; ce qui ſe voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx - ac} + ad$ à la place de $AP(x)$ ſa valeur $AC(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy - ad} + ac$ à la place de $AQ(y)$ ſa valeur $AB(2a)$. La ſeconde conſiſte en ce que $CR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui ſe trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$ dont le lieu eſt l'Hyperbole OSR, d'abord à la place de $AP(x)$ ſa valeur $AC(2a)$, & enſuite à la place de $AQ(y)$ ſa valeur $AB(2a)$. La troiſiéme ſe tire de ce qu'en ſuppoſant $AK(c)$ moindre que $CK(d)$ comme on le fait ici, il s'enſuit que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa - ad} + ac\right)$ eſt moindre que $\overline{CL}^2 \left(\frac{aabb}{4aa - ac} + ad\right)$. Or cela poſé, ſi l'on veut que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa - ad} + ac\right)$ ſoit moindre que $\overline{BO}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour d ſa valeur $2a - c$ & operant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'eſt à dire, que le côté AB du triangle donné ABC doit être moindre que le côté AC: & ſi l'on veut que le quarré $\overline{CL}^2 \left(\frac{aa'b}{4aa - ac} + ad\right)$ ſoit plus grand que $\overline{CR}^2 (2aa)$, on trouvera en mettant pour c ſa valeur $2a - d$ & operant à l'ordinaire que le côté BC $(\sqrt{bb + dd})$ doit ſurpaſſer le côté $AC(2a)$. Mais il eſt viſible que BK étant moindre que BO & CL plus grande que CR, les deux lignes courbes KML, OMR,

ſe coupent neceſſairement au dedans du quarré *ABDC*. D'où il ſuit que ſi le triangle donné *ABC* a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté *AC* ſur lequel on ſuppoſe que les deux points *F*, *D*, ſe rencontrent, celui des trois dont la grandeur eſt moyenne entre les deux autres & pour le côté *AB* le plus petit, le Problême aura toûjours neceſſairement une ſolution, puiſqu'alors (*fig.* 261.) le point *K* ſe trouvera entre les points *A*, *C*, & que *AK* eſt moindre que *AC*, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul ſur lequel tout ce raiſonnement eſt fondé. On trouvera en la même ſorte que ſi le triangle donné eſt rectangle ou obtus-angle, & qu'on prenne pour le côté *AC* ſur lequel doivent tomber les deux extrêmités *D*, *F*, le côté moyen, on aura toûjours une ſolution; de ſorte que cette remarque eſt generale pour toutes ſortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole *OSR* & la courbe *KML* ſe coupent non ſeulement dans un point *M*, au dedans du quarré *ABDC*, comme le demande le Problême; mais encore en un autre point *M* au dehors de ce quarré. Or ſi l'on veut ſçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des reſolutions du Problême ſuivant, dont celui-ci n'eſt qu'un cas particulier.

Fig. 263. Trouver ſur le côté *AC* du triangle donné *ABC*, deux points *F*, *D*, tels qu'ayant mené les droites *FG*, *DE*, qui font avec les deux autres côtés *AB*, *BC*, les triangles *FGA*, *DEC*, égaux chacun à la moitié du triangle *ABC*: les lignes *FG*, *DE*, s'entrecoupent à angles droits au point *H*, & le quadrilatere *BGHE* ſoit égal au quart du triangle *ABC*.

Fig. 263. & 262. Car lorſque le point d'interſection *M* tombe au dedans du quarré *ABDC*, il eſt clair que les lignes *AP*, *PM* ſeront chacune moindre que le côté *AC*, & qu'ainſi les points *F*, *D*, qu'elles déterminent tomberont tous deux entre les points *A*, *C*; ce qui reſoud le Problême énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorsque le point M tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes AP, PM est moindre que son côté AC, & l'autre plus grande ; il s'ensuit que l'un des points F, D, tombe sur le côté AC du triangle donné, & l'autre sur ce même côté prolongé ; ce qui donne une autre solution du Problême énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 23. & 24.

EXEMPLE X.

441. UNE Section conique MAN étant donnée, avec un point S hors de son plan pour le sommet du cone dont elle est la Section ; on demande la position du cercle MaN qui en est la base.

Je distingue cette question en deux differens cas, dont le premier est lorsque la Section donnée est une Parabole, & le second lorsque c'est une Ellipse ou une Hyperbole.

Premier cas. La question se reduit à trouver sur la Parabole, le point A tel qu'ayant mené de ce point le diametre AP avec la ligne AS ; du point S la ligne SD parallele à AP ; & d'un point quelconque P du diametre AP, une ordonnée PM à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire aD à cette ordonnée dans le plan du triangle DSA, qui rencontre les côtés SA, SD, aux points a, D : le quarré de PM soit égal au rectangle $aP \times PD$. Car décrivant dans le plan aPM un cercle qui ait pour diametre aD, il est clair qu'il passera par le point M, puisque l'angle APM est droit, & que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$, qui est la proprieté essentielle du cercle ; c'est pourquoi menant le diametre PA, & tirant de l'extremité D, du diametre Da du cercle une parallele DS à PA, qui rencontre aA menée de son autre extremité a par l'origine A du diametre AP, en un point S, le cone qui a pour sommet ce point, & pour base le cercle MAN, formera * par la rencontre avec le plan APM la Parabole même FIG. 264.

* Art. 269.

donnée *MAN*. Voici comment on peut trouver le point *A*.

Soit v le parametre inconnu du diametre *AP*, & l'on aura par la proprieté de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$; mais pour satisfaire au Problême, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP.\ Pa :: PD.\ v$, qui se change en menant *AO* parallele à *Da* en cette autre $SO.\ AO :: PD$ ou $AO.\ v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné *S* sur le plan de la Parabole la perpendiculaire *SF*, & du point *F* où elle rencontre ce plan, sur l'axe *BG* la perpendiculaire *FG*, qui rencontre le diametre *AP* en *H*. Je tire du point *A* l'ordonnée *AK* à l'axe, & la perpendiculaire *AQ* à la tangente *AL*, lesquelles rencontrent en *E* & *Q* la ligne *FQ* menée par le point *F* parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point *Q* une perpendiculaire *QO* sur le plan de la Parabole, qui rencontrera *SD* dans le même point *O*, où la ligne *AO* parallele à *aD* la rencontre. Car la tangente *AL* étant parallele à l'ordonnée *PM* qui est perpendiculaire sur *aD*, l'angle *LAO* sera droit aussi-bien que l'angle *LAQ*, & ainsi le plan *QAO* sera perpendiculaire sur *AL*, & sur le plan de la Parabole qui passe par cette ligne; c'est pourquoi la ligne *QO* perpendiculaire à ce plan se trouvera dans le plan *QAO*, & rencontrera par consequent la ligne *SD* dans le même point *O*, où le plan *QAO*, c'est à dire, la ligne *AO* parallele à *aD* la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux *FS*, *QO*, sont dans le plan de la Parabole. Cela posé.

Je nomme les données *SF* ou *QO*, a; *FG*, ou *KE*, b; *GB*, c; le parametre de l'axe, p; & les inconnuës *BK*, x; *KA* ou *GH*, y; & j'ai à cause des triangles semblables *AKT*, *AEQ*, cette proportion $AK\ (y).\ KT$

* Art. 24 * $(\frac{1}{2}p) :: AE\ (b+y).\ EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$: ce qui donne à

cause

cauſe des triangles AEQ, AQO, rectangles en E & Q, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AE}^2 + \overline{EQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$. Or le parametre du diametre AP ſçavoir $v =$ * $p + 4x = p + \frac{4yy}{p}$, en mettant pour x ſa valeur $\frac{yy}{p}$; & SO ou FQ ou $GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p = c + \frac{yy}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$. * *Art.* 17.

Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $\overline{AO}^2 = SO \times v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa = cp + yy + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + \frac{4cyy}{p} + \frac{4y^4}{pp} + 2by + 2yy$, c'eſt à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui ſe trouvent les mêmes, ſubſtituant pour yy la valeur px, & operant enſuite à l'ordinaire;

$$\begin{array}{llll} x^3 + cxx & + \frac{1}{4}cpx & - \frac{1}{16}bbp & = 0 \\ + \frac{1}{2}p & - \frac{1}{4}aa & & \\ & - \frac{1}{4}bb & & \\ & + \frac{1}{16}pp & & \end{array}$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen * de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnuë BK, qui ſert à déterminer le point A tel qu'on le demande. * *Art.* 387.

Second cas. Toute la difficulté conſiſte à trouver ſur l'Hyperbole donnée MAN, le point A tel qu'ayant mené le diametre AB avec les lignes SAa, BSb; & par un de ſes points quelconques P, du diametre AB une ordonnée PM dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire ab à cette ordonnée dans le plan du triangle aSb: on ait le quarré $\overline{PM}^2$ égal au rectangle $aP \times Pb$. Cela ſe prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point A. FIG. 265.

Soit v le diametre conjugué au diametre AB, & ſoient menées dans le plan du triangle aSb, les lignes AO parallele à ab, & OZ parallele à AB qui rencon-

tre SA en Z; & l'on aura $AP \times PB$ à $\overline{PM}^2$ ou (à cause du cercle) à $aP \times Pb$, en raison composée de AP à Pa, ou ZO à OA, & de PB à Pb, ou de BA à AO; c'est à dire, comme $ZO \times AB$ est à $\overline{AO}^2$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, $AP \times PB . \overline{PM}^2 :: \overline{AB}^2 . vv$; & partant $ZO \times AB . \overline{AO}^2 :: \overline{AB}^2 . vv = \frac{AB \times \overline{AO}^2}{ZO}$. Ce qui donne $OZ . AB$, ou $OS . SB :: \overline{AO}^2 . vv$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques, tant de la raison de OS à SB, que des quarrez $\overline{AO}^2$ & vv; je mene du point donné S, la ligne SF perpendiculaire sur le plan des Hyperboles; du point F où elle rencontre ce plan, la perpendiculaire FG à l'axe DK qui est donné de position & de grandeur, puisque les Hyperboles sont données; & du point cherché A, l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AT à la tangente AL, lesquelles rencontrent la ligne BF aux points E, Q. Je tire enfin BH parallele à l'axe qui rencontre GF en X, TV parallele à BF qui rencontre AE en V, & BD, QR, perpendiculaires sur l'axe; & ayant élevé QO perpendiculaire sur le plan de l'Hyperbole, on prouvera comme dans la Parabole qu'elle rencontrera la ligne BS au même point O, où la ligne AO parallele à ab la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, sont dans le plan des Hyperboles. Cela posé.

Soient nommées $SF = a$, $FG = b$, $CG = c$, le premier axe $= 2d$, le second $= 2f$, les inconnuës CK ou $CD = x$, AK ou BD ou GX ou $KH = y$; & l'on aura DK ou $BH = 2x$, DG ou $BX = c + x$, $GK = x - c$,
* Art. 122. $TK = ^{*}\frac{ffx}{dd}$, & AT ou $\sqrt{\overline{TK}^2 + \overline{AK}^2} = \sqrt{yy + \frac{f^4xx}{d^4}}$ $= \frac{f}{dd}\sqrt{ddxx + ffxx - d^4}$ en mettant pour yy sa va-
* Art. 81. leur $^{*}\frac{ffxx}{dd} - ff$. Or les triangles semblables BXF, BHE, TKV donnent $BX (c + x) . XF (b - y) :: BH (2x)$.

$HE = \frac{2bx-2xy}{c+x} :: TK\left(\frac{ffx}{dd}\right).\ KV = \frac{bffx-ffxy}{cdd+ddx}$; & partant AE ou $AK+KH+HE = \frac{2bx+2cy}{x+c}$, & AV ou $AK-KV = \frac{cddy+ddxy+ffxy-bffx}{cdd+ddx}$: mais à cauſe des triangles ſemblables AVT, AEQ, & ATK, QTR, il vient $AV.\ AT :: AE.\ AQ = \frac{2bfx+2cfy\sqrt{ddxx+ffxx-d^4}}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$, & $AT.\ TK :: QT.\ TR :: AT+TQ$ ou $AQ.\ KT+TR$ ou $KR = \frac{2bffxx+2cffxy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$. Donc $\frac{GR \text{ ou } GK+KR}{DG} = \frac{ddxy+ffxy+bffx-cddy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$, $\frac{DR \text{ ou } DK+KR \times FS}{DG} = \frac{2addxy+2affxy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy} = QO$, puiſque $DG.\ DR :: BF.\ BQ :: FS.\ QO$; & à cauſe du triangle rectangle AQO, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AQ}^2+\overline{QO}^2 = \frac{\overline{2bfx+2cfy}^2 \times \overline{ddxx+ffxx-d^4} + \overline{2addxy+2affxy}^2}{\overline{ddxy+ffxy-bffx+cddy}^2}$. De plus $SO.\ SB :: FQ.\ FB :: GR.\ GD$, & $vv =$* $4xx+4yy+4ff-4dd$ ou $4xx-4dd+\frac{4ffxx}{dd}$. * Art. 125.

Si donc l'on met dans la proportion $SO.\ SB :: \overline{AO}^2.\ vv$, à la place tant de la raiſon de SO à SB ou GR à GD, que des quarrés $\overline{AO}^2$ & vv, les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, on formera en multipliant les extrêmes & les moyens cette égalité $\overline{2bfx+2cfy}^2 \times \overline{ddxx+ffxx-d^4} + \overline{2addxy+2affxy}^2 = \overline{ddxy+ffxy+bffx-cddy} \times \overline{ddxy+ffxy-bffx+cddy} \times \overline{4xx+\frac{4ffxx}{dd}-4dd}$, dans laquelle tous les termes où y ſe rencontrera au premier degré s'effaceront; & mettant à la place du quarré yy ſa valeur $\frac{ffxx}{dd}-ff$, on trouvera $bbd^4x^4+2bbddffx^4+bbf^4x^4-bbd^6xx-ccd^6xx-bbffd^4xx-ccffd^4xx+ccffd^6+ccd^8 = \overline{ddxx+ffxx-d^4-aadd-ccdd} \times \overline{ddx^4+2ffx^4+\frac{f^4}{dd}x^4-d^4xx-2ddffxx-f^4xx}$ qui ſe change en faiſant pour abre-

ger $dd + ff = mm$, $bb + cc = nn$, $aa + dd + cc = rr$, en cette autre $bbm^4x^4 - mmnnd^4xx + ccmmd^6 = \overline{mmxx - ddrr} \times \overline{\frac{m^4}{dd}x^4 - m^4xx}$ qui se reduit enfin en faisant $xx = dz$ à cette égalité du troisiéme degré

$$z^3 \left.\begin{matrix} -d \\ -\frac{drr}{mm} \\ -\frac{dbb}{mm} \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} +\frac{ddrr}{mm} \\ +\frac{nnd^4}{m^4} \end{matrix}\right\} z - \frac{ccd^5}{m^4} = 0;$$

dont l'une des racines; sçavoir celle qui est plus grande que d, est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & d moitié du premier axe; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de CK qui sert à déterminer le point cherché A. On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396, & 399. du Livre précedent.

Lorsque $CG\ (c) = 0$, c'est à dire, lorsque le point F tombe sur le second axe; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré, puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par z. Mais lorsque $FG\ (b) = 0$, ce qui arrive lorsque le point F tombe sur le premier axe; le terme $\frac{dbbzz}{mm}$ s'efface dans l'égalité précedente, & un qui est $bb + cc$ devient cc; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z\ d$, & qu'elle se reduit par consequent à celle-ci $zz - \frac{drr}{mm}z + \frac{ccd^4}{m^4} = 0$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette derniere égalité $c = 0$; ce qui doit arriver lorsque le point F tombe sur le centre C, puisqu'alors les lignes b & c deviennent chacune nulles; on aura $z = \frac{drr}{mm}$, & partant dz ou $xx = \frac{ddrr}{mm}$, & $x = \frac{dr}{m} = d\sqrt{\frac{aa + dd}{dd + ff}}$.

Il est inutile d'avertir que le Problême se resoud par

la même voie dans l'Ellipse, n'y ayant de changement que dans quelques signes. Mais on peut toûjours rapporter, si l'on veut, ce second cas au premier, de la maniere qui suit.

Ayant mené par un point quelconque *B* de l'une des Hyperboles données, une tangente *BG*; & ayant fait passer par cette tangente, & par le sommet donné *S*, un plan *GBS*: soit mené par tout où l'on voudra, un autre plan *HKL* parallele à celui-ci. Je dis qu'il formera dans la surface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en *S*, & mûë autour de l'Hyperbole opposée *MAN*, une ligne courbe *HKL* qui sera une Parabole; de sorte que toute la difficulté est reduite au cas précedent. Car supposant que le cercle *DHMNL* soit la base du cone, qui a pour sommet le point *S*, & pour Section l'Hyperbole *MAN* avec son opposée; il est clair que le plan *GBS* touchant les deux surfaces coniques opposées qui ont pour base ce cercle, dans le côté *BSD*, formera dans le plan de la base, une ligne droite *DE* qui touchera cette base en un point *D*. Or comme cette ligne est la directrice par rapport à la Section *HKL*, il s'ensuit selon la définition dixiéme du Livre VI. que cette Section sera une Parabole. FIG. *A*.

Ce Problême a été trés-celebre du temps de M. Descartes, & l'on en a trouvé une solution parmi ses Manuscrits, qui est imprimée à la fin de la 75e Lettre du 3e tome. Si l'on veut se donner la peine de comparer sa solution avec la mienne, on verra que non seulement elle est moins naturelle puisqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle est beaucoup plus embarrassée. Aussi ne donne-t'il point l'analyse du cas où la Section est une Ellipse ou une Hyperbole; & il se contente d'assurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problême, ne doit pas passer le quatriéme degré.

LEMME I.

FIG. 266. 267. 268. 442. *Si par l'extremité* B *d'un diametre* AB, *l'on mene une corde quelconque* BD *qui termine l'arc* AD *moindre que la demie circonference; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus* EF, FG, *égaux chacun à l'arc* AD, *on tire les cordes* BE, BF, BG: *je dis que la corde du milieu* BF *est à la somme ou à la difference de ses deux voisines* BE, BG, *comme le rayon* CB *est à la corde* BD: *sçavoir à la somme lorsque l'origine commune* B *des cordes* BD, BE, BF, BG, *ne tombe sur pas un des deux arcs* EF, FG; *& au contraire à la difference, lorsqu'il tombe sur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car soit du centre *F*, & du rayon *FB*, décrit un arc de cercle qui coupe la corde *BG* prolongée, s'il est necessaire, au point *H*, pour avoir une triangle isoscelle *BFH*, qui sera semblable au triangle isoscelle *DCB*; puisque l'angle *FBH* a pour mesure la moitié de l'arc *FG* égal à l'arc *AD*, dont la moitié est aussi la mesure de l'angle *CBD*. On aura donc *FB. BH* :: *CB. BD*, de sorte qu'il ne reste qu'à démontrer que la ligne *BH* est la somme des deux cordes *BE*, *BG*, dans le premier cas, & leur difference dans le second. Pour le faire.

FIG. 266. Soient tirées les cordes *EF*, *FG*, & on aura deux triangles *BEF*, *FHG*, qui seront semblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle *FHB* ou *FHG*, est égal à l'angle *FBH* qui vaut l'angle *FBE*, puisque les arcs *FG*, *FE*, sont égaux; & de plus l'angle *BEF* est égal à l'angle *FGH*, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc *BF*; & partant l'angle *GFH* est égal à l'angle *EFB*. Or les côtés *FE*, *FG*, & *FB*, *FH*, sont égaux entr'eux. Le côté *GH* sera donc égal au côté *BE*. Donc &c.

FIG. 267. 268. On prouvera à peu prés de même dans le second cas que les triangles *FHG*, *FBE*, sont semblables & égaux; & qu'ainsi la ligne *BH* est la difference des deux cordes *BG*, *BE*.

LEMME II.

443. SOIT *une Table dont le premier rang parallele renfermant le nombre* 2, *& le second la lettre* x; *le troisiéme* $xx - 2$ *soit le produit du second par* x, *moins le premier, le quatriéme* $x^3 - 3x$ *soit le produit du troisiéme par* x, *moins le second, le cinquiéme* $x^4 - 4xx + 2$ *soit le produit du quatriéme par* x *moins, le troisiéme, & ainsi de suite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. FIG. 269.
Je dis que si le premier rang 2 *de la Table exprime la valeur* 270.
du diametre BA, *& le second rang* x *celle de la premiere corde* BD; *le troisiéme rang* $xx - 2$ *exprimera la valeur de la seconde corde* BE, *le quatriéme rang* $x^3 - 3x$ *celle de la troisiéme corde* BF, *& ainsi de suite jusqu'à la derniere* BR: *en observant que ces cordes deviennent negatives, lorsqu'elles passent de l'autre côté du point* B.

Table pour la division des arcs de cercle en parties égales.

1er	2
2^e	$1x$
3^e	$1xx - 2$
4^e	$1x^3 - 3x$
5^e	$1x^4 - 4xx + 2$
6^e	$1x^5 - 5x^3 + 5x$
7^e	$1x^6 - 6x^4 + 9xx - 2$
8^e	$1x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$
9^e	$1x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + 2$
10^e	$1x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$
11^e	$1x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx - 2$
12^e	$1x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x$
13^e	$1x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x + 105x^4 - 36xx + 2$
14^e	$1x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x$

Car 1°. Lorsque l'arc *AR* est moindre que la demie FIG. 269.
circonference *ADB*; si l'on multiplie une corde quelconque *BF* par *x*; & qu'on retranche de ce produit la corde *BE* qui la precede, on aura la corde *BG* qui la suit immediatement, puisque selon le Lemme précé-

dent $CB(1)$. $BD(x)$ :: BF. $BE+BG = xBF$, & partant $BG = xBF - BE$. Donc &c.

FIG. 270. 2°. Lorſque l'arc AR eſt plus grand que la demie circonference ADB; il eſt viſible que l'origine commune B de toutes les cordes ſe trouvera neceſſairement ſur l'une des parties égales comme GH, dans leſquelles l'arc AR eſt diviſé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troiſiéme rang de la Table exprime la valeur de BE, le quatriéme celle de BF, & ainſi de ſuite juſqu'à BG: mais il reſte à démontrer que le rang qui ſuit celui qui exprime la corde BG, n'exprimera point la valeur de $+BH$, mais celle de $-BH$; & de même que le rang qui ſuit ce dernier exprime la valeur de $-BI$, & ainſi de ſuite juſqu'à $-BR$.

Selon la formation de la Table, le rang qui ſuit celui qui exprime BG eſt $xBG - BF$. Or par le Lemme $CB(1)$. $BD(x)$ :: BG. $BF - BH$, & partant $-BH = xBG - BF$; c'eſt à dire que $-BH$ vaut le rang parallele de la Table qui ſuit immediatement celui qui exprime la valeur de BG. Mais ſelon la formation de la même Table, le rang qui ſuit celui qui vaut $-BH$ eſt $-xBH - BG$ valeur de BI, puiſque ſelon le Lemme $xBH = BI - BG$: & de même le rang qui ſuit celui qui vaut $-BI$ eſt ſelon la formation de cette même Table $-xBI + BH$ valeur de la corde negative $-BL$, puiſque ſelon le Lemme $xBI = BL + BH$. Or il eſt viſible qu'il en eſt de même de toutes les cordes qui ſuivent BL juſqu'à BR; & c'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

COROLLAIRE I.

FIG. 169. 170. 444. De là il eſt évident que ſi l'arc AR eſt diviſé en cinq parties egales, le ſixiéme rang de Table $x^5 - 5x^3 + 5x$ exprimera la valeur de la corde BR qui ſoutend l'arc BR difference de l'arc AR & de la demie circonference ADB; que s'il étoit diviſé en ſept parties égales, le huitiéme rang ſeroit la valeur de BR;

&

& en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut BR: en observant que le rayon $CB=1$, que la premiere corde $BD=x$, & que la derniere corde BR est negative lorsque l'arc AR est plus grand que la demie circonference.

COROLLAIRE II.

445. ON voit par la composition de cette Table, 1°. Que le nombre 2 est le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 3°. Que les coeficiens de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire sont égaux à l'unité. 3°. Que le coeficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, est toûjours égal au coeficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coeficient du terme qui est au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que le coeficient 14. du quatriéme terme $14x^3$ du troisiéme rang perpendiculaire, est égal au coeficient 5 du quatriéme terme $5x^3$ du deuxiéme rang perpendiculaire qui est le rang à gauche, plus au coeficient 9 du terme $9xx$ qui est au dessus du terme $14x^3$.

REMARQUE.

446. SI l'on continuoit à diviser la circonference en parties égales aux arcs AD, DE, &c. au de là du point R; il est clair que les rangs paralleles de la Table qui suivent celui qui exprime $+BR$ continueroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui suivroient BR, jusqu'à ce que repassant le point B elles redeviendroient encore negatives; & ainsi de suite alternativement positives & negatives, autant de fois qu'elles passeroient le point B jusqu'à l'infini. FIG. 270.

EXEMPLE I.

447. COUPER un arc de cercle donné AR, en autant de parties égales AD, DE, EF, FG, &c. qu'on voudra.

FIG. 269. 270. Ayant mené le diametre AB & la corde BR, & nommé le rayon donné CA ou CB, I; la corde donnée BR, a; on formera une égalité dont le premier membre sera le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales, & le second sera $\mp a$; sçavoir $+a$ lorsque l'arc AR est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand. Or il est visible selon l'article 443. que la resolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ses racines x, une valeur BD telle qu'ayant décrit du point B comme centre & de l'intervalle BD un arc de cercle, il coupera sur l'arc donné AR la premiere des parties égales cherchées AD.

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc donné AR en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \mp a$, dont l'une des racines BD terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviser l'arc AR en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$; & de même, s'il falloit diviser en sept, il viendroit $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$: de sorte que toute la difficulté se reduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Livre precedent. Donc &c.

Il est à remarquer que ces égalités sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des parties égales est un nombre premier. Mais lorsqu'il est composé de deux ou plusieurs nombres premiers, on divisera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & ensuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres premiers, dont le produit for-

me le nombre donné ; ce qui donnera enfin la premiere des parties égales qu'on cherche : si l'on veut, par exemple, diviser l'arc *AR* en trente parties égales, il faudra d'abord le diviser en cinq, ensuite la premiere de ces cinq parties en trois, & enfin la premiere de ces trois en deux, pour avoir la trentiéme partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 \times 3 \times 2$.

REMARQUE I.

448. DEUX points donnés *A*, *R*, sur la circonference d'un cercle en déterminent non seulement deux arcs, dont l'un *AR* est moindre que la demie circonference, & l'autre *ABR* plus grand ; mais encore une infinité de portions, dont les unes sont la circonference entiere plus l'arc *AR*, deux fois la circonference plus l'arc *AR*, trois fois la circonference plus l'arc *AR* &c. & les autres sont la circonference entiere plus l'arc *ABR*, deux fois la circonference plus l'arc *ABR*, trois fois la circonference plus l'arc *ABR* &c ; dont la raison est que la circonference d'un cercle rentrant en elle-même, on peut considerer cette ligne courbe comme faisant une infinité de revolutions autour d'elle-même. Si donc l'on nomme l'arc *AR*, d ; la circonference entiere c ; l'arc *ABR* sera $c-d$ & l'on aura ces deux suites, FIG. 270. 271.272.&c.

1°. $d, c+d, 2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d$ &c.

2°. $c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d$, &c.

qui expriment par ordre toutes les portions de circonferences terminées par les deux points *A*, *R*. Cela posé.

Si l'arc *AD* est une aliquote quelconque de l'arc *AR* moindre que la demie circonference ; & qu'ayant inscrit dans le cercle un poligone *DEFGH* &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point *D*, on tire de l'extremité *B* du diametre *AB* aux angles du poligone les cordes *BD*, *BF*, *BG*, *BH* &c :

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux ſuites, dont l'origine fixe eſt toûjours au point A.

FIG. 271. Car ſoit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5}d$; il eſt clair que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH\ \frac{4c+d}{5}$ qui ſont les cinquiémes parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere ſuite. Or ſi l'on diviſe tel autre de ſes termes qu'on voudra par 5, il eſt viſible que le quotient renferme au juſte un certain nombre de fois la circonference entiere plus une des cinq fractions précedentes. Donc puiſque la corde qui termine un arc, dont l'origine eſt en A, eſt la même que celle qui termine cet arc plus la circonference repetée autant de fois qu'on veut, il s'enſuit que les cordes BD, BE, BF, BG, BH, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la premiere ſuite. On prouvera de la même maniere que les arcs AH, AHG, $AHGF$, $AHGFE$, $AHGFED$ ſont les cinquiémes parties des cinq premiers termes de la ſeconde ſuite, & qu'ainſi les cordes BH, BG, BF, BE, BD, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la ſeconde ſuite. Mais il viſible que cette démonſtration ſe peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc AR. Donc &c.

FIG. 273. 274. De là il ſuit que ſi l'on réünit les deux ſuites précedentes en une ſeule d, $c \mp d$, $2c \mp d$, $3c \mp d$ &c; les deux cordes voiſines de part & d'autre de la plus grande ou premiere BD qui termine l'aliquote AD de l'arc AR moindre que la demie circonference, termineront des aliquotes pareilles du ſecond terme $c \mp d$ de la ſuite; que les deux cordes voiſines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troiſiéme terme $2c \mp d$ de la ſuite; & ainſi à l'infini de deux en deux juſqu'aux dernieres lorſque l'aliquote eſt impaire, & juſqu'à la derniere lorſqu'elle eſt paire. Ainſi lorſque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes BE, BH, terminent les deux arcs ADE, AH,

cinquiémes parties du second terme $c \mp d$ de la suite, c'est à dire de la circonference plus l'arc AR, & de la circonference moins cet arc; les deux cordes BF, BG, voisines de celles-ci termineront deux arcs $ADEF$, AHG, qui sont les cinquiémes parties du troisiéme terme $2c \mp d$ de la suite: & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les deux cordes BE, BK, voisines de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD terminent les deux arcs ADE, AK, qui sont les sixiémes parties du second terme $c \mp d$; les deux cordes BF, BH, voisines de ces deux-ci terminent les deux arcs $ADEF$, AKH, sixiémes parties du troisiéme terme $2c \mp d$; & enfin la derniere corde BG termine les deux arcs $ADEFG$, $AKHG$, sixiémes parties du quatriéme terme $3c \mp d$.

On entend dans les remarques suivantes par *cordes impaires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD, se trouvent dans des lieux impairs à commencer par cette plus grande; & par *cordes paires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la même BD, se trouvent dans des lieux pairs. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes BD, BF, BG, sont des cordes impaires, & les cordes BE, BH, des cordes paires: & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les cordes BD, BF, BH, sont des cordes impaires, & les côtés BE, BK, BG, sont des cordes paires.

REMARQUE II.

449. Si l'arc AD est une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonference ARB; & qu'ayant inscrit dans le cercle à commencer par le point D, un poligone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extrêmité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c: je dis que les cordes impaires lorsque l'arc AD est une aliquote impaire de l'arc AR, & leurs quar- FIG. 273. 274.

rés lorsqu'il en est une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur positive $+a$, le rang parallele de la Table dont l'exposant surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone ; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le second, expriment les racines vraies de l'autre égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative $-a$, le même rang parallele de la Table.

Fig. 171. 273. Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; je dis que les cordes impaires BD, BF, BG, sont les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & que les cordes paires
Fig. 172. 274. BE, BH, sont les racines vraies de l'autre égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, seront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$, & les quarrés des cordes paires BE, BK; BG, seront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$.

Car si l'on propose de diviser la circonference entiere repetée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc AR, en parties égales dont la premiere soit moindre que la demie circonference, il est clair selon l'article 444. qu'on formera la même Table que pour la division de l'arc AR : en observant que les cordes doivent changer necessairement une fois de signe (avant que d'arriver à la derniere BR) lorsque la circonference n'est repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune B de toutes se trouve sur l'une des parties égales ; que les cordes doivent changer deux fois de signes, lorsque la circonference est repetée deux fois, parce que l'origine B se trouve necessairement sur deux des parties égales ; qu'elles doivent changer trois fois, lorsque la circonference est repetée trois fois, parce que l'origine B se trouve sur trois parties égales, & ainsi de suite. La corde BR sera donc positive lorsqu'il s'agit de diviser en parties égales l'arc AR & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc AR ; & negative lorsque la circonferen-

ce est repetée un nombre impair de fois: c'est à dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallele de la Table à la grandeur positive $+a$. Et par consequent les cordes impaires ou leurs quarrés seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. *Ce qu'il falloit &c.*

REMARQUE III.

450. Les mêmes choses étant posées, si l'arc AD est un aliquote impaire de l'arc AR; il est clair par l'inspection de la Table, que tous les termes pairs, c'est à dire, le deuxiéme, quatriéme, sixiéme &c, excepté le dernier terme a, manquent toûjours dans les deux égalités qu'on trouve selon la remarque précedente. Or l'on sçait en Algebre, qu'en changeant de signes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où il suit que les cordes paires qui sont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $-a$, deviendront des racines fausses de l'autre égalité dont l'un des membres est $+a$. Par exemple si l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes impaires BD, BF, BG, seront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires BE, BH, en seront les racines fausses. FIG. 271. 273.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques plusieurs Theorêmes la plûpart entierement nouveaux, touchant l'inscription des poligones reguliers; si l'on fait attention que la grandeur connuë du second terme d'une égalité renferme la somme de ses racines, que celle du troisiéme terme renferme la somme des plans alternatifs de ses racines, que celle du quatriéme terme renferme la somme des solides alternatifs &c, & enfin que le dernier terme est égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, aprés avoir fait la remarque suivante qui peut être de quelque utilité.

REMARQUE IV.

FIG. 271. 273. 451. LES mêmes choses étant posées que dans la Remarque précedente, où l'on veut que l'aliquote *AD* de l'arc *AR* soit impaire; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonference *ARB* qui contient l'arc *AR*, la derniere ou plus petite *BF* soûtend un arc *BF* qui est à l'arc *BR*, en même raison que l'arc *AD* à l'arc *AR*.

Car soit l'arc *AD* la cinquiéme partie de l'arc *AR*, & par consequent l'arc *DE* la cinquiéme partie de la circonference; il est clair que la demie circonference *ARB* contiendra deux fois & demie l'arc *DE*, c'est à dire, deux fois l'arc *DE* ou bien l'arc *DEF* plus la cinquiéme partie de la demie circonference. Donc l'arc *AD* plus l'arc *BF* vaut la cinquiéme partie de la demie circonference *ARB*. Donc puisque *AD* est la cinquiéme partie de l'arc *AR*, il s'ensuit que *BF* sera aussi la cinquiéme partie de l'arc *BR* complement à deux droits de l'arc *AR*. Mais ce que l'on vient de démontrer subsiste avec la même force, soit que l'arc *AD* soit la cinquiéme partie de l'arc *AR*, ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raison de dire en general &c.

De là on voit que si l'on nomme *b* la corde *BR* d'un arc quelconque *BR* moindre que la demie circonference, dont le rayon est 1; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres soit *b*, & l'autre le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales dans lesquelles l'arc *BR* doit être divisé: cette égalité aura pour l'une de ses racines la corde *BF* de la premiere de ses parties, & par consequent pour une autre de ses racines, la corde *BG* de la premiere d'un pareil nombre de parties égales de l'arc *BAR* complement à quatre droits de l'arc *BR*.

THEOR. I.

THEOREME I.

452. *Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGH &c. *d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque* B *de la circonference à tous les angles du poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c : *je dis*, FIG. 271.

1°. *Que la somme des cordes impaires* BD, BF, BG &c, *à commencer par la plus grande* BD *sera toûjours égale à la somme des cordes paires* BE, BH &c ; *c'est à dire que la plus petite corde* BF — BE + BD — BH + BG &c = 0.

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés, il est clair comme l'on vient de voir que si l'on nomme la corde *BR*, *a* ; & le rayon *CA* ou *CB*, 1 ; les cordes impaires *BD*, *BF*, *BG &c*, seront les racines vraies, & les cordes paires *BE*, *BH &c*, les racines fausses de l'égalité qui a pour l'un de ses membres + *a*. Or puisque le second terme, qui selon qu'on démontre en Algebre contient la somme des racines, manque toûjours dans cette égalité ; il s'ensuit &c.

2°. *Que si l'on mene le diametre* BA, *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne l'arc* AD *autant de fois que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR ; *le produit* BD×BE×BF×BG×BH &c *de toutes les cordes* BD, BE, BF, BG, BH &c *les unes par les autres, sera toûjours égal au produit de la corde* BR *par une puissance du rayon* CA *qui ait pour exposant le nombre des cordes* — 1.

Car ce dernier produit vaut le membre *a* ; puisque *BR* = *a*, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon *CA*. Or comme le terme *a* est toûjours le dernier terme de l'égalité qui a pour ses racines toutes les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH &c*, & que le dernier terme d'une égalité contient toûjours selon ce qu'on démontre en Algebre le produit de toutes ses racines : il s'ensuit &c.

THEORESME II.

FIG. 273. 453. *Si l'on divise une demie circonference* AEB *en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premieres soient l'arc* AE, *les quatre premieres l'arc* AEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BE, BF &c: *je dis.*

1°. *Que la premiere de ces cordes* BE, *moins la seconde* BF, *plus la troisiéme, moins la quatriéme &c, jusqu'à la derniere inclusivement; est toûjours égale au rayon.*

2°. *Que le produit* BE×BF &c *de toutes les cordes les unes par les autres, est égale à une puissance convenable du rayon. Ainsi dans cet exemple où le nombre des divisions est 5, & où il n'y a par consequent que deux cordes* BE, BF; *on aura* 1° $BE - BF = CA$. 2°. $BE \times BF = \overline{CA}^2$.

Car inscrivant dans le cercle entier le poligone regulier *EFGH* dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions à commencer par le point *A*; & tirant de l'autre extremité *B* du diametre *AB* à toue les angles de ce poligone des cordes *BD*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*; il est clair 1°. Que la plus grande de ces cordes *BD* est égale au diametre *BA*, & qu'ainsi l'arc *AD* étant nul ou zero, l'arc *AR* le sera aussi; d'où l'on voit que la corde *BR* sera aussi égale au diametre *BA*. 2°. Que les cordes *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*, étant prises deux à deux sont égales entr'elles. Or cela posé, si l'on applique le Theorême précedent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

THEORESME III.

FIG. 272. 454. *Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGHK &c, *dont le nombre des côtés soit pair; & que d'un point quelconque* B *de la circonference, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, BK &c: *je dis.*

1°. *Que la somme tant des quarrés des cordes impaires* BD,

BF, BH, *que des cordes paires* BE, BG, BK, *est égale au quarré du rayon* CB *pris autant de fois que le poligone a de côtés.*

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés; il est clair * qu'en nommant la corde *BR*, *a*; & le rayon *CA* ou *CB*, 1; les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, seront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $+a$; & que les quarrés des cordes paires *BE*, *BK*, *BG &c*, seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. Or le coeficient du second terme de chacune de ces deux égalités qui contient la somme de leurs racines, est toûjours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c. *Art. 449.

2°. *Qué si l'on mene le diametre* BA; *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne autant de fois l'arc* AD *que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR: *le produit* $\overline{BD}^2 \times \overline{BF}^2 \times \overline{BH}^2$ &c *des quarrés des cordes impaires, est égal au produit de* $BA \mp BR$ *par une puissance convenable du rayon, sçavoir* $BA + BR$ *lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, &* $BA - BR$ *lorsqu'il est pairement pair, c'est à dire, divisible par* 4; *& le produit* $\overline{BE}^2 \times \overline{BG}^2 \times \overline{BK}^2$ &c *des cordes paires, est égal au produit de* $BA \pm BR$ *par la même puissance du rayon, sçavoir* $BA - BR$ *dans le premier cas &* $BA + BR$ *dans le second.*

Car nommant *BR*, *a*; & le rayon *CA*, 1; il est clair que les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, sont les racines d'une égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \mp a$ c'est à dire $BA \mp BR$; & de plus que les quarrés des cordes paires *BE*, *BG*, *BK &c*, sont les racines de l'autre égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \pm a$ c'est à dire $BA \pm BR$. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toûjours le produit de toutes ses racines, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE.

455. DE LA il eſt évident 1°. Que la ſomme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, eſt égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du poligone, c'eſt à dire ici que $\overline{BF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{BG}^2 = 12\,\overline{CA}^2$. 2°. Que la difference des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, eſt toûjours égale à zero, c'eſt à dire, que $\overline{BF}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{BG}^2 = o$. 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, eſt égal au quadruple d'une puiſſance pareille du rayon ; c'eſt à dire, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 + \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 4\,CA^6$. 4°. Que la difference de ces deux produits, eſt égale au double de la corde BR multipliée par une puiſſance convenable du rayon ; en obſervant que le produit du quarré des cordes impaires, ſurpaſſe celui des quarrés des cordes paires, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt ſimplement pair, & au contraire qu'il eſt moindre, lorſqu'il eſt pairement pair : c'eſt à dire ici, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 - \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 2BR \times CA^5$. 4°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres ſera toûjours égal au produit de $\overline{BA}^2 - \overline{BR}^2 = BA \mp BR \times BA \pm BR = \overline{AR}^2$ à cauſe de l'angle droit ARB ; par une puiſſance convenable du rayon : c'eſt à dire, en extrayant de part & d'autre les racines quarrées, que le produit de toutes les cordes eſt égal au produit de la corde AR par une puiſſance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes ; par exemple ici, $BF \times BE \times BD \times BK \times BH \times BG = AR \times CA^5$.

THEORESEME IV.

FIG. 275. 456. *SI l'on diviſe une demie circonference* ADB *en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere*

soit l'arc AD, *les trois premieres l'arc* ADE, *les cinq premieres l'arc* ADEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF &c : *je dis.*

1°. *Que la somme des quarrés de ces cordes est égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de divisions. C'est à dire ici, où le nombre des divisions est 6, que* $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6\,\overline{CA}^2$.

2°. *Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puissance convenable du rayon. Ainsi* $\overline{BD}^2 \times \overline{BE}^2 \times \overline{BF}^2 = 2\,CA^6$, *& par consequent* $BD \times BE \times BF = CA^3 \times \sqrt{2}$.

Car inscrivant dans le cercle entier un poligone regulier *DEFGHK*, dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions, à commencer par la premiere *D* ; & tirant de l'extremité *B* du diametre *AB*, à tous les angles de ce poligone, des cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *FG* : il est clair que les cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*, étant prises deux à deux sont égales entr'elles ; & partant que si l'on applique les articles premier & troisiéme du Corollaire précedent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorême.

EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque, dont le nombre des côtés soit donné.

On peut regarder ce Problême, comme n'étant qu'un cas particulier de l'exemple précedent. Car si l'on suppose que la corde *BR* devienne nulle ou zero, il s'ensuit que l'arc *AR* qu'elle termine deviendra la demie circonference. Or si l'on propose de diviser la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales ; il est évident qu'en divisant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la seconde corde au FIG. 275.

lieu de la premiere, elle terminera la premiere des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demie circonference ADB en sept parties égales $AD, DE, EF, FG, GH, HI, IB$; la seconde corde BE terminera l'arc AE qui est la septiéme partie de la circonference entiere. D'où l'on voit qu'en égalant à zero le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone, on formera une égalité dont la plus grande des racines x exprimera la valeur de la corde BD qui termine l'arc AD moitié de l'arc cherché AE. Mais * $CB(1) . BD(x) :: BD(x) . BE+BA$, & par consequent si l'on nomme la seconde corde BE, z; on aura $xx=z+2$. Si donc l'on fait évanoüir par le moyen de cette égalité l'inconnuë x dans la precedente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine z exprimera la corde BE qui termine l'arc cherché AE. Ainsi dans nôtre exemple, en égalant à zero le huitiéme rang parallele & divisant par x, je trouve cette égalité $x^6-7x^4+14xx-7=0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $z+2$, à la place de x^4 le quarré de cette valeur &c. je la change en cette autre $z^3-zz-2z+1=0$, dont la plus grande des racines z exprime la valeur de la corde BE qui termine l'arc AE septiéme partie de la circonference entiere.

Fig. 276.

* Art. 442.

Voici maintenant une maniere generale de trouver immediatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du poligone est impair qui est le seul cas necessaire; puisque s'il étoit pair, on le reduiroit toûjours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonference, on auroit par la bissection d'une des parties égales, réïterée autant qu'il seroit necessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallele étant 1, & le second $z-1$; le troisiéme $zz-z-1$ soit égal au produit du second par z, moins le premier; le quatriéme $z^3-zz-2z+1$ soit égal au pro-

duit du troisiéme par z, moins le second ; & ainsi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre soit le rang parallele de la Table, qui ait pour exposant la plus grande moitié du nombre des côtés du poligone. Je dis que la plus grande des racines z de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du poligone.

Table pour l'inscription des poligones reguliers dans le cercle.

1[er]	1
2[e]	$z - 1$
3[e]	$zz - z - 1$
4[e]	$z^3 - zz - 2z + 1$
5[e]	$z^4 - z^3 - 3zz + 2z + 1$
6[e]	$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$
7[e]	$z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6zz - 3z - 1$
8[e]	$z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6zz - 4z + 1$
9[e]	$z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10zz + 4z + 1$
10[e]	$z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10zz + 5z - 1$

Qu'il faille, par exemple, inscrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatriéme rang parallele de la Table, parce que 4 est la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zero j'ai $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande racine z exprimera la valeur de la corde BE, qui termine l'arc AE septiéme partie de la circonference entiere. Pour le prouver.

Soit un arc de cercle AR moindre que la demie circonference, divisé en un nombre quelconque impair, de parties égales aux points D, E, F, G &c: & soient menées de l'extremité B du diametre BA, les cordes BD, BE, BF, BG &c, jusqu'à la derniere BR. Ayant pris l'arc AS égal à l'arc AD, soit tirée la corde BS, & soient nommées la premiere corde BD ou BS, x; & la seconde BE, z. Cela posé, on aura selon le Lemme $CB(1) . BE(z) :: BD(x) . BF + BS$. Et par consequent $BF = xz - x$. De même $CB(1) . BE(z) :: BF . BD + BH$. Et par consequent $BH = zBF - BD$; de FIG. 175.

même encore CB (1). BE (z) :: BH. $BF+BR$, & partant $BR = zBH - BF$: c'est à dire, que la cinquiéme corde BH est égale au produit de la troisiéme BF par z, moins la premiere BD; que la septiéme BR est égale au produit de la cinquiéme BH par z, moins la troisiéme BF; & ainsi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que si l'on construit une Table dont le premier rang étant x, & le second $xz - x$; le troisiéme $xzz - xz - x$ soit égal au produit du second par z, moins le premier; le quatriéme $xz^3 - xzz - 2xz +$ [illegible] soit égal au produit du troisiéme par z moins le second; & ainsi à l'infini: les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires BD, BF, BH, BR, de l'arc AR. Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la précedente multipliez chacun par x, il s'ensuit qu'en supposant que la derniere corde BR devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorsque l'arc AR devient la demie circonference,) & faisant ce qu'on vient de prescrire, on aura une égalité dont l'inconnuë z exprimera la seconde corde BE qui termine l'arc AE qui est contenu autant de fois dans la circonference entiere, que l'arc AD qui en est la moitié, l'est dans la demie circonference.

FIG. 276.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette maniere sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des côtés du poligone est un nombre premier: mais que lorsqu'il est composé de deux ou de plusieurs nombres premiers, il faudra diviser d'abord la circonference entiere en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & ensuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & continuer jusqu'à ce que tous les nombres premiers qui composent le nombre donné des côtés du poligone soient épuisés. 2°. Qu'entra les cordes qui partent du point B, & qui sont renfermées dans la demie circonference AEB; les impaires à commencer par la plus grande BE sont les racines vraies,

vraies, & les paires les fausses des égalités qu'on trouve par cette methode : ainsi les cordes BE, BI, sont les deux racines vraies de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, & la corde BG en est la fausse. 3°. Qu'entre les racines de ces sortes d'égalités, la plus petite est la corde d'un arc qui est la moitié de celui qu'on cherche : c'est à dire dans cette exemple, que la plus petite racine BI de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, est la corde d'un arc BI qui est la quatorziéme partie de la circonference.

REMARQUE.

458. Il est visible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier & du second rang perpendiculaire ont chacun pour coeficient l'unité; que ceux du troisiéme & du quatriéme rang ont pour coeficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continuelle des unités; que ceux du cinquiéme & du sixiéme rang ont pour coeficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c qui se forment par l'addition continuelle des nombres naturels; que ceux du septiéme & du huitiéme rang ont pour coeficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10 &c, qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires; & ainsi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre superieur qui se forment par l'addition continuelle de ceux du dernier ordre.

LEMME I.

459. *S'il y a sur un demi cercle* AEB *deux arcs égaux* AD, EF, *dont l'un* AD *ait son commencement en l'une des extremités* A *du diametre* AB, *& l'autre* EF *soit pris par tout où l'on voudra; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, *&* AD, AE, AF: *je dis*, 1°. *Que* $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. 2°. *Que* $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. FIG. 277.

Car les trois triangles rectangles ADG (le point G est ici le point d'interfection des cordes BD, AF), AEB,

BFG sont semblables entr'eux ; puisque l'angle AGD ou BGF ayant pour mesure la moitié des deux arcs BF, AD, est égal à l'angle BAE qui a aussi pour mesure la moitié des deux arcs BF, FE, ou AD. Si donc l'on nomme le diametre AB, 1 ; les cordes BD, x ; AD, y ; BE, v ; AE, z ; on aura 1°. $BE(v).\ EA(z) :: AD(y).\ DG = \frac{yz}{v}$, & partant BG ou $BD - DG = x - \frac{yz}{v}$. 2°. $AB(1).\ BE(v) :: BG\left(x - \frac{yz}{v}\right).\ BF = vx - yz$ c'est à dire (puisque $AB = 1$) que $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

Maintenant $BE(v).\ BA(1) :: AD(y).\ AG = \frac{y}{v}$. Et $AB(1).\ AE(z) :: BG\left(x - \frac{yz}{v}\right).\ GF = xz - \frac{zzy}{v}$; & partant $AG + GF$ ou $AF = xz - \frac{zzy}{v} + \frac{y}{v} = xz + vy$, puisqu'à cause du triangle rectangle AEB on trouve $1 - zz = vv$; c'est à dire que AF ou $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. Et c'est ce qui restoit à démontrer.

LEMME II.

460. SOIT *formée une Table, dont le premier rang parallele étant composé de deux parties* x & y, *tous les autres le soient aussi selon cette regle ; la premiere partie de tel rang parallele qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallele qui le précede immediatement, multipliée par* x, *moins la seconde partie du même rang multipliée par* y : *& la seconde partie vaut la même premiere partie multipliée par* y, *plus la même seconde multipliée par* x. *Soit de plus un arc de cercle*

FIG. 278. *quelconque* AR *moindre que la demie circonference divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. *Je dis que si le diametre* AB = 1, *& les deux premieres cordes* BD = x, AD = y ; *toutes les autres cordes* BE, BF, BG &c, *seront exprimées par les premieres parties du deuxiéme, troisiéme, quatriéme, &c. rang parallele, &*

les autres cordes correſpondantes AE, AF, AG, &c, *par les ſecondes parties des mêmes rangs. Ainſi* BG *étant la quatriéme corde, vaut la premiere partie* $x^4 - 6yyxx + y^4$ *du quatriéme rang parallele, & ſa correſpondante* AG *vaut la ſeconde partie* $4yx^3 - 4y^3x$ *du même rang.*

1er	x	y
2e	$xx - yy$	$2yx$
3e	$x^3 - 3yyx$	$3yxx - y^3$
4e	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5e	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6e	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x$
7e	$x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^7 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - x^7$.

Car il eſt clair ſelon le Lemme précedent que le produit d'une corde quelconque *BF* par la premiere corde *BD* (x), moins le produit de la corde correſpondante *AF*, par l'autre premiere corde *AD* (y) exprime la valeur de la corde *BG* qui ſuit immediatement *BF*; & auſſi que la corde *AG* vaut $BF \times AD\ (y) + AF \times BD\ (x)$. Donc &c.

COROLLAIRE.

461. SI l'on ajoûte enſemble les deux parties de chaque rang parallele de la Table précedente, en mettant par ordre tous les termes qui les compoſent ſelon les differens degrez des puiſſances de x; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puiſſances du binome $x + y$: en obſervant que le premier & le ſecond terme doivent être pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, & ainſi alternativement de deux en deux juſqu'au dernier. Ainſi le troiſiéme rang parallele contiendra $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$; c'eſt à dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers negativement: de même le cinquiéme rang parallele contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui eſt la cinquiéme

puiſſance du binome $x+y$, dont le premier & le ſecond terme ſont pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, le cinquiéme & le ſixiéme affirmativement ; & il en eſt ainſi de tous les autres rangs à l'infini.

1er	$x + y$
2^e	$xx + 2yx - yy$
3^e	$x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$
4^e	$x^4 + 4yx^3 - 6yyxx - 4y^3x + y^4$
5^e	$x^5 + 6yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$
6^e	$x^6 + 6yx^5 - 15yyx^4 - 20y^3x^3 + 15y^4xx + 6y^5x - y^6$
7^e	$x^7 + 7yx^6 - 21yyx^5 - 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5xx - 7y^6x - y^7$

Car ſi l'on fait attention à la maniere dont la Table précedente eſt formée, on verra que tous les termes de chacun de ſes rangs paralleles ſont formés par ceux du rang parallele qui le précede, multiples par x & par y, & joints par des ſignes $+$ & $-$, en telle ſorte que les termes des deux parties qui compoſent chaque rang, étant mis par ordre, ſelon les differens degrés de l'inconnuë x, il y a de ſuite deux ſignes $+$, & aprés deux ſignes $-$; & ainſi alternativement juſqu'au dernier.

REMARQUE.

462. Il eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coeficient l'unité ; que ceux du ſecond rang ont pour coeficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du troiſiéme rang ont pour coeficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du quatriéme rang ont pour coeficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, 20 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainſi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un

ordre superieur, se forment par l'addition continuelle de ceux de l'ordre immediatement précedent.

EXEMPLE XII.

463. UN arc de cercle AR étant donné; le divi- FIG. 278.
ser en autant de parties égales qu'on voudra, aux points D, E, F, G &c; par une methode differente de celle de l'exemple dixiéme.

Ayant nommé le diametre AB, 1; les cordes données BR, a; AR, b; qui terminent l'arc donné AR; & les cordes inconnuës BD, x; AD, y; qui terminent l'arc cherché AD; on élevera le binome $x+y$ à une puissance dont l'exposant soit égal au nombre des divisions. On formera deux égalités, dont la premiere aura pour l'un de ses membres la donnée a, & pour l'autre tous les termes impairs de la puissance de $x+y$, joints par des signes $+$ & $-$ alternatifs; & la seconde aura pour l'un de ses membres la donnée b, & pour l'autre tous les autres termes de la même puissance du binome $x+y$, joints encore ensemble par des signes alternatifs $+$ & $-$. On fera évanoüir l'une ou l'autre des inconnuës x ou y, par le moyen de l'égalité $xx = 1 - yy$ ou $yy = 1 - xx$, qui se tire du triangle ADB rectangle en D: ce qui donnera enfin une derniere égalité où il n'y aura qu'une seule inconnuë x ou y, dont la resolution fournira la valeur de cette inconnuë BD ou AD qui termine l'arc cherché AD.

Qu'il faille, par exemple diviser l'arc cherché AR en sept parties égales, aux points D, E, F, G, H, I. Je prends la septiéme puissance $x^7 + 7yx^6 + 21yyx^5 + 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5xx + 7y^6x + y^7$ du binome $x+y$, de laquelle je forme les deux égalités $a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$. Et faisant évanoüir dans la premiere de ces deux égalités l'inconnuë y, ou dans la seconde l'inconnuë x, par le moyen de l'égalité $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$,

je forme l'une de ces deux nouvelles égalités $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^7$, qui ne renferme plus qu'une seule inconnuë, & dont la resolution qui se fera selon les regles du Livre précedent, fournira pour l'une de ses racines x ou y, une valeur BD ou AD qui servira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela est une suite des deux articles précedens.

Il est à remarquer que si l'arc AR étoit plus grand que la demie circonference, celle des deux égalités précedentes qui a pour l'un de ses membres $+ b$ sert également sans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+ a$ en $- a$; dont la raison est que la corde BR (a) passant de l'autre côté du point B devient negative de positive qu'elle étoit, au lieu que la corde AR ne repassant point de l'autre côté du point A demeure toûjours positive.

LEMME I.

464. QUE *dans un quarré quelconque de cellules on remplisse de la lettre* a, *toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre* b, *toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere;* & *ensuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'est à sçavoir qu'une cellule doit toûjours être égale à celle qui est au dessus plus à celle qui est à gauche: de cette sorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela posé;*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	a	a	a	a	a	a	a
2.	b	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$	$5a + b$	$6a + b$
3.	b	$a + 2b$	$3a + 3b$	$6a + 4b$	$10a + 5b$	$15a + 6b$	$21a + 7b$
4.	b	$a + 3b$	$4a + 6b$	$10a + 10b$	$20a + 15b$	$35a + 21b$	$56a + 28b$
5.	b	$a + 4b$	$5a + 10b$	$15a + 20b$	$35a + 35b$	$70a + 56b$	$126a + 84b$
6.	b	$a + 5b$	$6a + 15b$	$21a + 35b$	$56a + 70b$	$126a + 126b$	$252a + 210b$
7.	b	$a + 6b$.	$7a + 21b$	$28a + 56b$	$84a + 126b$	$210a + 252b$	$462a + 462b$

Je dis qu'une cellule quelconque est égale à la cellule qui est

à gauche plus à toutes celles qui sont au dessus : c'est à dire, par exemple, que la quatriéme cellule 4a+6b *du troisiéme rang perpendiculaire, est égale à la cellule* a+3b *qui est à gauche, & qui par consequent est la quatriéme du second rang perpendiculaire, plus à toutes les autres* a+2b, a+b, a, *qui sont au dessus d'elle dans ce second rang.*

Car supposant que a, c, d, e, expriment les quatre premieres cellules du second rang perpendiculaire, & a, f, g, h, les quatre premiers du troisiéme rang, on aura par la formation du quarré de cellules $h = e + g$, $g = d + f$, $f = c + a$, & partant $h = e + d + c + a$; ce qu'il falloit prouver. Or il est visible que cette démonstration se peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voisins. Donc &c.

COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallele & celle du premier rang perpendiculaire, sont composées de deux termes dans le premier desquels se trouve la lettre a, & dans le second la lettre b; il s'ensuit 1°. Que le terme où se trouve la lettre a, est égal au terme où se trouve la même lettre a dans la cellule à gauche, plus à tous les termes où elle se rencontre dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci. 2°. Que le terme où se trouve la lettre b, est égal au terme où se trouve la même lettre b dans dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle se trouve dans les cellules qui sont au dessus. Ainsi le terme $15a$ de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire, est égal au terme $5a$ de la cellule à gauche, plus aux termes $4a$, $3a$, $2a$, $1a$, qui se trouvent dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci; & de même $20b$ est égal au terme $10b$ de la cellule à gauche, plus aux termes $6b$, $3b$, $1b$, de toutes les cellules qui sont au dessus.

LEMME II.

466. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre* a *dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire moins* 1; *je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme* 15*a de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire par* $5+4-2=7$, *& qu'on divise le produit par* $4-1=3$; *le quotient* 35*a sera égal au terme* 15*a plus à tous les autres* 10*a*, 6*a*, 3*a*, 1*a*, *qui sont au dessus de lui.*

Cela est visible dans toutes les cellules du deuxiéme rang perpendiculaire, puisqu'elles contiennent toutes le même terme 1*a*. Or je vais démontrer que supposé que cette proprieté se rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle se trouve necessairement dans celui qui est à droit; d'où il suivra que puisqu'elle se trouve dans le deuxiéme rang perpendiculaire, elle sera aussi dans le troisiéme, que puisqu'elle se rencontre dans dans le troisiéme, elle sera aussi dans le quatriéme, & ainsi de suite à l'infini. Pour le prouver.

Soient a, e, c, d, e, f &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où se trouve la lettre a, dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; $a, g, h, k, l,$ &c un pareil nombre de termes du rang qui est à droit à commencer aussi par le premier. Soit de plus m égale à la somme des exposans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où se trouve le terme f; & r égale à l'exposant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la suppo-

* Art. 464. sition $\frac{m}{r} f = f + e + d + c + a =$ * l, $\frac{m-1}{r} e = e + d + c + a = k$, $\frac{m-2}{r} d = d + c + a = h$, $\frac{m-3}{r} c = c + a = g$, $\frac{m-4}{r} a = a$. Donc $l + k + h + g + a = \frac{m}{r} f$

+

$+ \frac{m-1}{r} e + \frac{m-2}{r} d + \frac{m-3}{r} c + \frac{m-4}{r} a = \frac{m}{r} \times f + e$ $+ d + c + a, - \frac{1}{r} \times 1e + 2d + 3c + 4a = \frac{m}{r} l, - \frac{1}{r} \times k$ $+ h + g + a$ en mettant pour $f + e + d + c + a$ sa valeur l, & pour $1e + 2d + 3c + 4a$ sa valeur $k + h$ $+ g + a$: transposant d'une part l & de l'autre $- \frac{1}{r} \times k$ $+ h + g + a$, on aura $\frac{r+1}{r} \times k + h + g + a = \frac{m-r}{r} l$: multipliant de part & d'autre par r, divisant par $r + 1$, & ajoûtant de part & d'autre l, il vient enfin $\frac{m+1}{r+1} l = l$ $+ k + h + g + a$. Mais comme le rang perpendiculaire de la cellule où se trouve l, surpasse d'une unité celui de la cellule où se trouve f, & que leur rang parallele demeure le même ; il est évident que la proprieté marquée pour chaque terme où se trouve la lettre a dans un rang perpendiculaire quelconque, convient aussi au terme l du rang perpendiculaire qui est à droit. De plus puisque cette démonstration subsiste également tel que puisse être le nombre de termes des deux rangs perpendiculaires voisins, il s'ensuit que ce que l'on vient de montrer par rapport au terme l, sera vrai aussi à l'égard de tout autre de son rang perpendiculaire.

Si l'on suppose à present que n exprime en general l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne renferme aucun terme où la lettre a se rencontre ; que la seconde renferme toûjours $1a$; que si l'on multiplie $1a$ par $\frac{n+2-2}{2-1} = \frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1} a$ pour le terme où se trouve la lettre a dans la troisiéme cellule ; & de même que si l'on multiplie $\frac{n}{1} a$ par $\frac{n+3-2}{3-1} = \frac{n+1}{2}$, on aura $\frac{n}{1} a \times \frac{n+1}{2}$ pour le terme où se trouve a dans la quatriéme cellule : de sorte que cette suite $0, 1a, \frac{n}{1} a, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} a,$ $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} a, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} a$ &c, exprimera

par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre *a*, dans les cellules du rang parallele dont *n* eſt l'expoſant. Ainſi ſi $n = 5$, la ſuite 0, 1*a*, 5*a*, 15*a*, 35*a* &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre *a* dans les cellules du cinquiéme rang parallele.

LEMME III.

467. *Si l'on multiplie le terme où ſe trouve la lettre* b *dans une cellule quelconque, par la ſomme des expoſans de ſon rang parallele & de ſon rang perpendiculaire moins 2, & qu'on diviſe le produit par l'expoſant de ſon rang perpendiculaire; je dis que le quotient ſera égal à ce terme plus à tous ceux qui ſont au deſſus de lui: c'eſt à dire, par exemple, que ſi l'on multiplie le terme* 10b *de la cinquiéme cellule du troiſiéme rang perpendiculaire par* $5 + 3 - 2 = 6$, *& qu'on diviſe le produit par* 3, *on aura* 20b *pour la ſomme du terme* 10b, *& de tous les autres* 6b, 3b, 1b, *qui ſont au deſſus de lui:*

Il eſt viſible que cette proprieté ſe rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur 1*b*, excepté la premiere dans laquelle la lettre *b* ne ſe rencontre point. Or de cela ſeul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme précedent à l'égard des termes qui ſont multiples de, *a*, qu'elle ſe doit rencontrer dans le ſecond rang perpendiculaire, dans le troiſiéme, dans le quatriéme, & ainſi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que ſi *n* deſigne l'expoſant d'un rang parallele quelconque autre que le premier; la ſuite $1b$, $\frac{n-1}{1} b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre *b* dans les cellules du rang parallele dont *n* eſt l'expoſant. Ainſi ſi $n = 5$, la ſuite 1*b*, 4*b*, 10*b*, 20*b*, 35*b* &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve *b* dans le cinquiéme rang parallele.

COROLLAIRE.

468. Il suit de ces deux derniers Lemmes, que si l'on ajoûte par ordre tous les termes de cette suite à ceux de la précedente, on en formera une, $1b$, $1a$, $+\frac{n-1}{1}b$, $\frac{n}{1}a+\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}b$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}a+\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}b$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n+1}{3}a\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}b$, &c; ou en abregeant l'expression, b, $a+\frac{n-1}{1}b$, $a+\frac{n-1}{2}b\times\frac{n}{1}a$ $+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $a+\frac{n-1}{4}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ &c. qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont n est l'exposant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette suite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les exposans de son rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puisque prenant dans la suite generale le terme qui répond à l'exposant du rang perpendiculaire, c'est à dire, le quatriéme terme, si le rang perpendiculaire est le quatriéme, le cinquiéme, s'il est le cinquiéme &c, & mettant dans ce terme à la place de n l'exposant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatriéme terme $a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, à la place de n l'exposant 5 du rang parallele de la cellule, on trouvera $a+\frac{4}{3}b\times 15$, c'est à dire, $15a+20b$ pour cette cellule; & il en est ainsi de toutes les autres.

LEMME IV.

469. *Si l'on fait* $a=2$ & $b=1$ *dans le quarré de cellules de l'article* 464, *on le changera en celui-ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de suite les premiers termes de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article* 443; *le second rang parallele, les seconds termes; le troisiéme*

rang, les troisiémes termes ; & ainsi de suite à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela est une suite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464. expliquée dans ce même article & dans le suivant 465.

COROLLAIRE.

470. Si l'on fait $b = 1$ & $a = 2$ dans la suite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c; on la changera en cette autre 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$, $\frac{n+5}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coeficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, son rang perpendiculaire & le quantiéme qu'il y occupe étant donnés. Voici la regle.

On prendra dans cette suite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'est à dire le troisiéme, si c'est le troisiéme rang, le quatriéme, si c'est le quatriéme &c; & ayant mis dans ce terme à la place de n le nombre qui expose le quantiéme du terme dans son rang perpendiculaire, c'est à dire 4 s'il est le quatriéme, 5, s'il est le cinquiéme &c, on aura le coeficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coeficient du quatriéme terme $14x^3$ du troisiéme rang perpendicu-

laire; on mettra dans le troisiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de *n* le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coeficient cherché.

Car l'exposant du rang perpendiculaire du coeficient pris dans la Table de l'article 443, est le même que l'exposant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article précedent; & le quantiéme que ce coeficient occupe dans son rang perpendiculaire, est l'exposant du rang parallele du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'est qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier ou $a=2$ & $b=1$.

LEMME V.

471. *Si l'on met 1 à la place de* b, *dans le quarré de cellules de l'article 464; on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle* Figurés : *sçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui sont les unités, le second rang les nombres naturels ou du second ordre qui se forment par l'addition continuelle des unités, le troisiéme rang les nombres triangulaires ou du troisiéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des naturels, le quatriéme les nombres piramidaux ou du quatriéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainsi à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	210	462	924

Car selon le même article 464, chaque cellule est

égale à celle qui eſt à gauche, plus à toutes les autres qui ſont au deſſus.

M. Paſchal a fait un Traité qui a pour titre Triangle Arithmetique, dans lequel il conſidere les proprietés de ces nombres, & fait voir qu'ils ſont d'un trés-grand uſage dans pluſieurs queſtions d'Arithmetique.

COROLLAIRE.

472. Si l'on fait $a = 1$ & $b = 1$ dans la ſuite generale de l'article 468. $b, a + \frac{n-1}{1} b, a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}, a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{3}$ &c; on changera en cette autre $1, n, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c, qui ſervira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, ſon ordre étant donné avec le quantiéme qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette derniere ſuite le terme qui répond à l'ordre donné, c'eſt à dire le troiſiéme, ſi c'eſt le troiſiéme ordre, le quatriéme, ſi c'eſt le quatriéme ordre &c; & ayant mis à la place de n le nombre qui expoſe le quantiéme du nombre figuré, c'eſt à dire 4, s'il doit être le quatriéme, 5, s'il doit être le cinquiéme &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple trouver le cinquiéme nombre du quatriéme ordre; je mets dans le quatriéme terme $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ de la ſuite à la place de n le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'eſt autre choſe que l'application de la regle de l'article 468. à ce cas particulier.

PROBLEM II.

473. SOIT *propoſé de trouver une ſuite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque, de la Table de la diviſion des arcs de l'article* 443.

Comme le troisiéme terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toûjours au premier du rang qui est à droit; il s'ensuit que si $m+1$ exprime en general l'exposant du rang parallele, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coeficient du terme dont le quantiéme est $m+1$; dans le deuxiéme, le coeficient du terme dont le quantiéme est $m+1-2$ ou $m-1$; dans le troisiéme, le coeficient du terme dont le quantiéme est $m-1-2$ ou $m-3$, & ainsi de suite en diminuant toûjours de 2 le quantiéme du terme à mesure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc selon la regle de l'article 470. mettre dans le second terme $\frac{n+1}{1}$ à la place de n le nombre $m-1$; dans le troisiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre $m-3$; dans le quatriéme terme $\frac{n+5}{3} \times \frac{n+1}{2}$ à la place de n le nombre $m-5$; dans le cinquiéme $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ à la place de n le nombre $m-7$; &c: ce qui donnera pour la suite des coeficiens 1, m, $\frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1}$, $\frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$, $\frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3}$, &c. Or comme les signes des termes d'un rang parallele quelconque de la Table sont toûjours alternatifs; & que le premier terme est toûjours l'inconnuë x élevée à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité que celui du rang parallele; & que tous les autres termes renferment des puissances de x dont les exposans diminuent continuellement de 2, en observant que $x^0 = 1$: il s'ensuit qu'on aura $x^m - mx^{m-2} + \frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1} x^{m-4} - \frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} x^{m-6} + \frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} x^{m-8}$ &c, pour l'expression generale du rang parallele de la Table, dont l'exposant est $m+1$. Ce qui étoit proposé.

Lorsqu'on a les premiers termes de ces sortes de suites, il est facile d'observer la loy qui y regne par tout,

& qui sert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on suppose, par exemple, dans celle-ci, que r exprime le quantiéme du terme dont on veut avoir le coeficient; il sera exprimé par la fraction generale $\frac{m \times m-r \times m-r-1 \times m-r-2 \text{ \&c}}{r-1 \times r-2 \times r-3 \times r-4 \text{ \&c}}$, en observant que le numerateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r-1$ contient d'unités. Ainsi si $r=5$, on aura pour le coeficient du cinquiéme terme, la fraction $\frac{m \times m-5 \times m-6 \times m-7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$: si $r=4$, on aura $\frac{m \times m-4 \times m-5}{3 \times 2 \times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette suite est toûjours déterminé, de sorte qu'il est égal à la plus grande moitié de l'exposant du rang parallele qu'elle exprime, lorsque cet exposant est impair, & à sa moitié au juste lorsqu'il est pair. Ainsi elle n'a que trois termes, lorsqu'elle exprime le cinquiéme ou le sixiéme rang parallele, elle n'en a que quatre, lorsqu'elle exprime le septiéme ou le huitiéme rang parallele, &c.

PROBLEME II.

474. SOIT *proposé de trouver une suite generale, qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'inscription des poligones reguliers de l'article* 457.

Comme le second terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui est à droit, il
* Art. 458. s'ensuit * que si $m+1$ est l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, les coeficiens des quatre premiers termes de ce rang seront 1, 1, $m-1$, $m-2$; le coeficient du cinquiéme terme sera le nombre trian-
* Art. 472. gulaire dont le quantiéme est $m-3$, c'est à dire * $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2}$; celui du sixiéme rang sera le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m-4$, c'est à dire $\frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2}$; celui du septiéme terme sera le nombre pira-

midal

midal dont le quantiéme est $m-5$, c'est à dire $\frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui du huitiéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m-6$, c'est à dire $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuviéme terme sera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme est $m-7$, c'est à dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainsi à l'infini. Si donc l'on joint à ces coeficiens les puissances de z qu'ils affectent, en faisant preceder le second & le troisiéme terme du signe $-$, le quatriéme & le cinquiéme du signe $+$, le sixiéme & le septiéme du signe $-$, & ainsi alternativement de deux en deux; on aura cette suite generale $z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, qui exprime par ordre tous les termes du rang parallele de la Table de l'article 457 dont l'exposant est $m+1$: où l'on doit observer de ne prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités,

PROBLESME III.

475. TROUVER *une suite generale, qui exprime par ordre, les coëficiens de tous les termes, de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'article 460; ou (ce qui est la même chose) d'une puissance quelconque du binome* $x+y$.

Soit en general m l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, il est clair que les coeficiens des deux premiers termes de ce rang seront toûjours * 1, m; & comme le second terme de chaque rang perpendiculaire à commencer par le second, répond au premier terme du rang qui est à droit, il s'ensuit que le coeficient du troisiéme terme du rang parallele sera *

* Art. 461.

* Art. 467.

le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m-1$, c'est à dire * $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatriéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m-2$, c'est à dire* $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquiéme terme sera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme est $m-3$, c'est à dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$; & ainsi à l'infini. On aura donc pour la suite generale qu'on demande 1, m, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

*Art. 472.

COROLLAIRE.

476. DE LA il suit que $\overline{x \mp y}^m = x^m \mp \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} yy x^{m-2} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} \ldots + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c.

PROBLESME IV.

477. TROUVER *une équation generale qui serve à diviser un arc de cercle donné* AR, *en autant de partie égales qu'on voudra.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 279. Soit en general m le nombre des parties égales, l'arc AD la premiere de ces parties; soit tiré le diametre AB, & les cordes BD, BR; & soit le rayon CA ou $CB = 1$, la corde donnée $BR = a$, la corde cherchée $BD = x$. On aura * $\mp a = x^m - m x^{m-2} + \frac{m \times m-3}{2 \times 1} x^{m-4} - \frac{m \times m-5 \times m-4}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times m-7 \times m-6 \times m-5}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$ &c, (sçavoir $+a$ lorsque l'arc donné AR est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand)

*Art. 444. 473.

pour l'équation generale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre m lorsqu'il est pair, où sa plus grande moitié lorsqu'il est impair contient d'unités; parce que le terme qui suivroit seroit nul ou zero.

Si $m = 5$, il vient $+ a = x^5 - 5x^3 + 5x$; si $m = 7$, on trouve $\mp a = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$.

SECONDE MANIERE.

Soit tiré le diametre AB, & les cordes BR, AR, BD, AD, qui terminent l'arc donné AR, & l'arc cherché AD. Soit m le nombre des parties égales, le diametre $AB = 1$, les cordes données $BR = a$, $AR = b$; & les cordes inconnuës $BD = x$, $AD = y$. On aura * ces deux égalités generales $\mp a = x^m - \frac{m \times m-1}{1 \times 2} yyx^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4}$ &c, $b = \frac{m}{1} yx^{m-1} - \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \ldots \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c, dans lesquelles mettant à la place de m, le nombre de parties égales dans lesquelles l'arc AR doit être divisé, il en vient deux autres particulieres, dont la resolution fournit la valeur cherchée de la corde $BD\,(x)$ ou $AD\,(y)$, aprés avoir fait évanoüir l'inconnuë y ou x, par le moyen de l'équation $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$.

* Art. 463. 475.

Soit par exemple $m = 7$. On aura $\mp a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 12y^5xx - y^7$, & l'on achevera le reste comme dans l'article 462.

PROBLESME V.

478. TROUVER *une équation generale, qui serve à inscrire dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque* ADEFGHK &c. FIG. 280.

Soit tiré le diametre AB, & la corde BD qui terminent le premier côté du poligone; soit le rayon

donné CA ou $CB = 1$, la corde inconnuë $BD = z$, & en general m la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je suppose être impair. On

* Art. 457. 474.

aura * $o = z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, pour l'équation generale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités, parce que celui qui suivroit seroit nul ou zero.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inscrire, on aura $m = 3$; & partant $o = z^3 - zz - 2z + 1$, dont la plus grande racine z exprimera la corde BD, qui termine l'arc AD, qui a pour corde le premier côté AD du poligone. De même si le nombre des côtés est 11, on aura $m = 5$; & par consequent l'équation generale devient $o = z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$, dont la plus grande des racines est $z = BD$.

PROBLESME VI.

FIG. 281. 282.

479. DIVISER *un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un instrument.*

1°. Soit proposé de diviser l'angle donné ECF en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés soient mobiles autour de ses quatre angles, & duquel les deux côtés AB, AD, soient indéfiniment prolongés vers X & Z; attacher l'angle C du rhombe, dans le sommet C de l'angle donné ECF; marquer sur les côtés CE, CF, les points E, F, en sorte que CE & CF soient égales chacune au côté CB ou CD ou DA ou AB du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou resserrer les côtés AX, AZ, de l'angle BAD, en sorte qu'ils passent par les points E, F; &

l'angle *BAD* sera la troisiéme partie de l'angle *ECF*.

Car les triangles *ABC*, *BCE*, étant isoscelles, l'angle externe *CBE* ou son égal *CEB*, qui vaut les deux internes opposés *BAC*, *BCA*, sera double de l'angle *BAC*; & dans le triangle *ECA*, l'angle externe *ECY*, qui vaut l'angle *CEA* plus l'angle *BAC*, sera triple de l'angle *BAC*. On démontrera de même que l'angle *FCY* est triple de l'angle *DAC*. D'où il suit que l'angle donné *ECF* est triple de l'angle *BAD*. *Ce qu'il falloit &c.*

2°. Soit proposé de diviser l'angle donné *HGK*, en cinq parties égales. On attachera dans l'angle *C* du rhombe *ABCD* de l'instrument précedent, un autre rhombe *CEGF*, dont les côtés seront égaux à ceux du premier & mobiles aussi autour de leurs angles. On fichera l'angle *G* de ce dernier rhombe, dans le sommet *G* de l'angle donné *HGK*; & ayant pris sur les côtés de cet angle les parties *GH*, *GK*, égales chacune au côté *GE* de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera l'angle *XAZ* mobile autour du point *A*, en sorte que ses côtés *AX*, *AZ*, touchent les angles *E*, *F*, & passent en même temps par les points marqués *H*, *K*. Je dis que l'angle *XAZ* ou *BAD* sera la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné *HGK*. FIG. 283. 284.

Car ayant mené dans le rhombe *ABCD* la diagonale *AC*, prolongée indéfiniment vers *Y*; elle passera par le point *G*, puisque les angles *ECY*, *FCY*, étant triples des angles égaux *BAC*, *DAC*, seront aussi égaux entr'eux. Or dans le triangle *EGA*, l'angle externe *HEG*, qui vaut les deux internes opposés *BAC*, *EGA*, ou *ECY* (à cause du triangle isoscelle *CEG*) sera quadruple de l'angle *BAC*. Et partant dans le triangle *AHG*, l'angle externe *HGY*, qui vaut les deux internes opposés *BAC*, *GHA* ou *GEH* (à cause du triangle isoscelle *EGH*) sera le quintuple de l'angle *BAC*. On prouvera de même que l'angle *KGY* sera quintuple de l'angle *DAC*; d'où il est évident

que l'angle entier HGK ſera quintuple de l'angle entier BAD ou XAZ.

S'il falloit diviſer un angle donné en ſept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes précedens, un troiſiéme rhombe égal & conſtruit de la même maniere ; & ainſi de ſuite de deux en deux. Car la pratique & la démonſtration ſe fera toûjours de la même maniere.

EXEMPLE.

480. TROUVER entre deux lignes données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnuë x la premiere des moyennes proportionnelles qu'il eſt queſtion de trouver ; & l'on aura la progreſſion geometrique continuë $a, x, \frac{xx}{a}, \frac{x^3}{aa}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantiéme ſurpaſſe de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée b on formera une égalité, dont la reſolution fournira la valeur de l'inconnuë x qui eſt la premiere des moyennes proportionelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progreſſion geometrique le quatriéme terme $\frac{x^3}{aa}$, qui étant égalé à la ligne b, donne $x^3 = aab$; & de même ſi l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4 b$. D'où il eſt facile de voir que ſi n marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données a & b, on aura $x^{n+1} = a^n b$ pour l'égalité generale qu'il faut reſoudre. Or cela poſé.

Soit 1°. $x^{17} = a^{16} b$ qui ſert à trouver ſeize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par x^3, afin d'avoir $x^{20} = a^{16} b x^3$, dont la plus haute dimenſion 20 eſt le produit des deux nombres 4 & 5 qui ſe ſuivent immediatement. Je prends l'é-

quation $x^5=a^4y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puiſſance quatriéme $x^{20}=a^{16}y^4=a^{16}bx^3$, d'où je tire une autre équation $y^4=bx^3$, dont le lieu étant conſtruit ſéparément, donnera par ſon interſection avec celui de la ſuppoſée $x^5=a^4y$, la valeur de l'inconnuë x. Ou bien je prends l'équation $x^4=a^3y$, dont j'éleve chaque membre à la quatriéme puiſſance; & les multipliant enſuite par x, j'ai $x^{17}=a^{12}y^4x=a^{16}b$, d'où je tire $y^4x=a^4b$, dont le lieu étant conſtruit ſéparément avec celui de l'équation $x^4=a^3y$, donnera par ſon interſection la valeur cherchée de l'inconnuë x.

Soit 2°. $x^{31}=a^{30}b$ qui ſert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par x^5, afin d'avoir $x^{36}=a^{30}bx^5$, dont la plus haute dimenſion 36 eſt le quarré de 6: c'eſt pourquoi faiſant $x^6=a^5y$, & prenant de part & d'autre la ſixiéme puiſſance, j'ai $x^{36}=a^{30}y^6=a^{30}bx^5$, d'où je tire $y^6=bx^5$, dont le lieu étant conſtruit ſéparément avec celui de l'équation que j'ai priſe d'abord $x^6=a^5y$, donnera par ſon interſection la valeur de l'inconnuë x. Ou bien ayant pris comme ci-deſſus l'équation $x^6=a^5y$, je l'éleve à la cinquiéme puiſſance, & la multipliant enſuite par x, j'ai $x^{31}=a^{25}y^5x=a^{30}b$, ce qui donne $y^5x=a^5b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x^6=a^5y$, étant conſtruit ſéparément avec le lieu de l'autre équation $y^5x=a^5b$, donnera la reſolution de l'égalité propoſée $x^{31}=a^{30}b$; de ſorte que l'on peut choiſir entre les deux lieux $y^6=bx^5$, ou $y^5x=a^5b$, celui qu'on jugera le plus ſimple. Il en eſt ainſi de tous les autres exemples qu'on peut ſe former à plaiſir.

Il eſt à remarquer que ſi la dimenſion de l'inconnuë x n'étoit pas un nombre premier, l'égalité propoſée ſe pourroit toûjours abaiſſer. Si l'on avoit, par exemple, $x^9=a^8b$, qui ſert à trouver huit moyennes proportionnelles; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x^3=\sqrt[3]{a^8b}$. Or afin que le nombre a^8b ſoit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne z dont le

cube $z^3 = aab$, ou ce qui est la même chose de trouver entre a & b deux moyennes proportionnelles; car mettant à la place de aab sa valeur z^3, on aura $x^9 = a^6 z^3$ ou $x^3 = a^2 z$, de sorte qu'en resolvant ces deux égalités $z^3 = aab$, & ensuite $x^3 = aaz$ qui ne sont que du troisiéme degré, on trouvera la valeur de l'inconuë x, qui est la premiere des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes a & b. De même si l'on avoit $x^{14} = a^{13} b$ qui sert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendroit en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^7 = \sqrt{a^{13} b}$. Or afin que $\sqrt{a^{13} b}$ soit un quarré, il faut trouver une ligne z dont le quarré $zz = ab$; car substituant à la place de ab, le quarré zz dans l'égalité proposée, on aura $x^{14} = a^{12} zz$ ou $x^7 = a^6 z$; c'est pourquoi il n'y aura qu'à resoudre d'abord l'égalité du second degré $zz = ab$, & ensuite celle du septiéme $x^7 = a^6 z$.

On doit encore remarquer que ces sortes d'égalités qui servent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimension de l'inconnuë est un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires; dont la raison est qu'il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui soit la premiere des moyennes proportionnelles cherchées.

REMARQUE.

FIG. 185. 481. ON peut resoudre le Problême précedent par le moyen d'un instrument geometrique dont la construction est telle. Soient deux lignes indéfinies XY, YZ, mobiles autour du point Y, en sorte qu'elles se puissent ouvrir & fermer. Soit attachée à un point quelconque fixe B du côté YX, une perpendiculaire indéfinie BC sur ce côté, laquelle chasse devant elle (pendant que l'angle XYZ s'ouvre) par le point C où elle rencontre l'autre côté YZ, la perpendiculaire indéfinie CD sur ce dernier côté; qui chasse de même

par

par le point *D* où elle rencontre le côté *YX*, la perpendiculaire indéfinie *DE*; qui chasse encore de même par le point *E* où elle rencontre le côté *YZ*, la perpendiculaire indéfinie *EF*; qui chassera par le point *F* où elle rencontre le côté *YX*, la perpendiculaire *FG*; qui chasse encore par le point *G* où elle rencontre le côté *YZ*, la perpendiculaire *GH*; & ainsi de suite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires sur les côtés *YX* & *YZ*. Cela fait, soit proposé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données *a* & *b*. Ayant pris sur le côté *YZ* la partie *YG* quatriéme proportionnelle aux trois lignes *a*, *b*, *YB*, on ouvrira le côté *XY* de l'instrument, jusqu'à ce que la cinquiéme perpendiculaire *FG* (parce qu'il est question de trouver quatre moyennes proportionnelles) passe par le point *G*; & alors les lignes *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, seront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes *YB*, *YG*; & partant la quatriéme proportionnelle aux trois lignes *YB*, *YC*, *a* sera la premiere des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles *YBC*, *YCD*, *YDE*, *YEF*, *YFG*, étant tous semblables; leurs côtés *YB*, *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, *YG*, seront en progression geometrique continuë. Donc &c.

Il est clair que pendant que l'angle *XYZ* s'ouvre de plus en plus, le point *B* décrit un arc de cercle *AB*; & que les intersections continuelles *D*, *F*, *H*, des perpendiculaires *CD*, *EF*, *GH*, sur le côté *YZ*, avec l'autre côté *YX*, décrivent des lignes courbes *AD*, *AF*, *AH*, qui servent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car si l'on décrit, par exemple, du diametre *YE* un demi cercle, il coupera la courbe *AD* en un point *D*, tel que *YD* est la seconde des deux moyennes proportionnelles, entre les ex-

Mmm

trêmes YB ou YA & YE; & de même si l'on décrit un demi cercle du diametre YG, il coupera la ligne courbe AF en un point F, tel que YF est la derniere des quatre moyennes proportionnelles entre YA & YG &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe AD est du quatriéme degré; la ligne courbe AF du huitiéme; la courbe AH du seiziéme &c; ce que je prouve ainsi.

Soient 1° les inconnuës & indéterminées $YC=x$, $CD=y$, $YD=z$, & la connuë YA ou $YB=a$, on aura à cause des triangles rectangles semblables YCD, YBC, cette équation $YB\ (a)=\frac{xx}{z}$, & à cause du triangle rectangle YCD cette autre $yy+xx=zz$, dans laquelle mettant à la place de z sa valeur $\frac{xx}{a}$ trouvée par le moyen de la premiere équation, il vient $aayy=x^4-aaxx$; ce qui fait voir que la courbe AD est un lieu du quatriéme degré. Soient 2° les inconnuës & indéterminées $YE=x$, $EF=y$, $YF=z$, & la connuë YA ou $YB=a$; on aura à cause des triangles rectangles semblables YFE, YED, YDC, YCB, cette équation $YB\ (a)=\frac{x^4}{z^3}$, & à cause du triangle rectangle YEF cette autre $yy+xx=zz$, dans laquelle faisant évanoüir l'inconnuë z par le moyen de la premiere équation, & ôtant les incommensurables, on trouve $aay^6+3aaxxy^4+3aax^4yy+aax^6=x^8$; d'où l'on voit que la courbe AF est un lieu du huitiéme degré. On prouvera de même que la courbe AH est un lieu du seiziéme degré &c.

Maintenant puisque selon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du second degré; quatre moyennes proportionnelles, en se servant d'un lieu du second degré, & d'un autre du troisiéme; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatriéme, qui

est la ligne *AD*, & un lieu du second qui est le cercle *YDE*; & dans le second un lieu du huitiéme, sçavoir, la ligne courbe *AF*, & un lieu du second, sçavoir le cercle *YFG*: il s'ensuit que ces lignes courbes *AD*, *AF*, *AH*, sont beaucoup trop composées pour resoudre ce Problême. Cependant la facilité de la construction, & de la démonstration, récompense en quelque sorte ce deffaut.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 137, *à la marge de l'Art.* 204, *au lieu de* FIG. 100. 111. *lisez*, FIG. 110. 111.

Pag. 148, *lig.* 9, *au lieu de* CL, *lisez*, CK.

Pag. 215, *lig. dern.* lignes, *lisez*, signes.

Pag. 263, *lig.* 1, *au lieu de* EXEMPLE II. *lisez*, EXEMPLE VI.

Pag. 264, *vis à vis de la lig.* 14, *à la marge*, *au lieu de*, Art. 287, *lisez*, Art. 237.

Pag. 293, *sur la fin*, COROLLAIRE, *lisez*, COROLLAIRE II.

Pag. 320, *lig.* 2, *au lieu de*, 389, *lisez*, 398.

Pag. 321, *lig.* 16, construire, *lisez*, trouver.

Pag. 348, *au lieu de*, FIG. 334. *lisez*, FIG. 234.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Nôtre Academie Royale des Sciences Nous ayant trés-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû luy donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de nôtre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences qui font l'objet de ses exercices; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'Elle a déja donnez au public, Elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit luy accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous luy avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrest de nôtre Conseil d'Etat du 13. du mois d'Aoust dernier. Et desirant donner à ladite Academie en corps, & en particulier à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au public; Nous avons permis & permettons par ces Presentes à ladite Academie, de faire imprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de nôtre obéïssance, par tel Imprimeur qu'Elle voudra choisir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon luy semblera: *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de l'Academie Royale des Sciences*; comme aussi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des particuliers qui la composent*, & generalement tout ce que ladite Academie voudra faire paroître sous son nom, lorsqu'aprés avoir examiné & approuvé lesdits Ouvrages aux termes de l'article XXX. dudit Reglement, elle les jugera dignes d'être imprimez: & ce pendant le tems de dix années consecutives, à compter du jour de la datte desdites Presentes. Faisons trés-expresses deffenses à tous Imprimeurs, Libraires, & à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition que ce soit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, aucun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Academie; comme aussi d'en introduire, vendre & debiter d'impression étrangere dans nôtre Royaume sans le consentement par écrit de ladite Academie ou de ses ayans cause, à peine contre chacun des contrevenans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de son-

dit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interests: à condition que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs-Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour: Que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformement aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les exposer en vente il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans nôtre Bibliotheque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre, & un dans celle de nôtre trés-cher & feal Chevalier Chancelier de France le sieur Phelyppeaux Comte de Pontchartrain Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes; du contenu desquelles Vous mandons & enjoignons de faire joüir ladite Academie ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Ouvrages soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foy soit ajoûtée comme à l'original: Commandons au premier nôtre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous actes requis & necessaires sans autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires: Car tel est nôtre plaisir. Donné à Versailles le neuviéme jour de Fevrier, l'an de grace mille sept cens quatre, & de nôtre Regne le soixante & uniéme. Par le Roy en son Conseil, Le Comte.

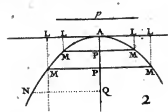
L'Academie Royale des Sciences par déliberation du 13. Fevrier 1704. a cedé le present Privilege à Jean Boudot son Libraire, pour en joüir conformément au Traité fait par l'Academie avec ledit Boudot le 13. Juillet 1699. En foy de quoy j'ay signé, à Paris ce 15. Fevrier 1704.

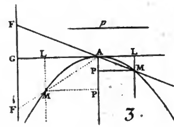
Fontenelle, *Secretaire de l'Academie Royale des Sciences.*

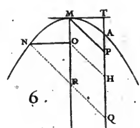
Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, Numero CVI *page* 136. *conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du Conseil du* 13. *Aoust dernier. A Paris, ce* 13. *Fevrier* 1704.

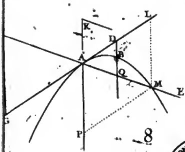
P. Emery, *Syndic.*

C *Planche 1re. pag. 14.*







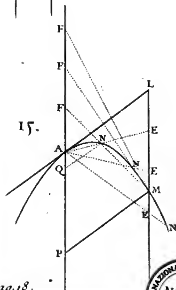






II.

13.

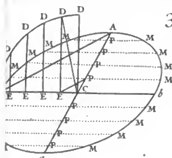


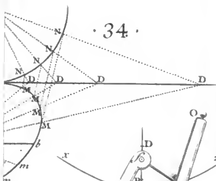
2 . pag. 18.

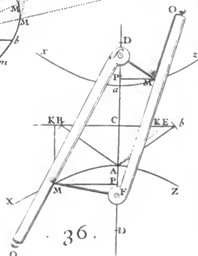
18

21

24


35.
D
M
A
P
E
C
b
a


34.
N
D
M
b
m
n


O
D
x
z
P
M
a
KB
C
KE
b
A
F
X
Z
36.

38.


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

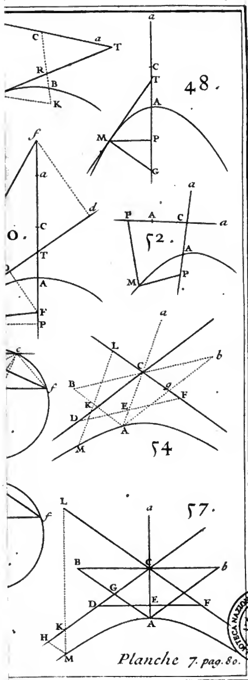
40.

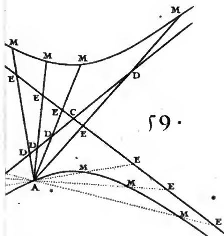
42.

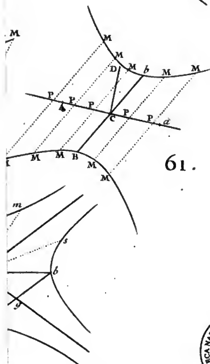
44.

45.




48.
52.
54
57.
Planche 7. pag. 80.


59.


61.



66.

67.

71.

74.

77

79

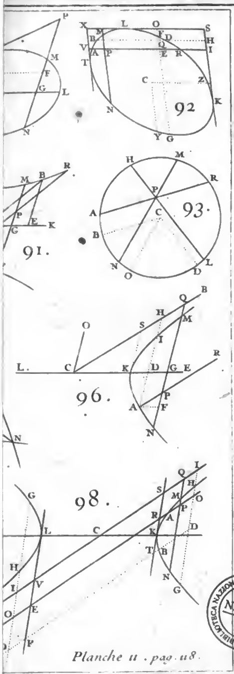
84.

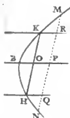
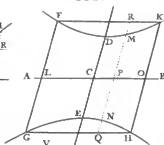
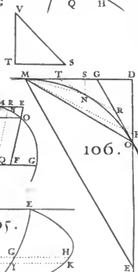
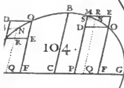
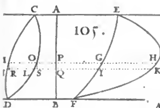
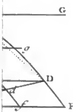
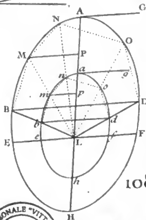
81.

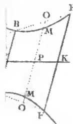
87.

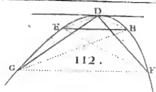
5.

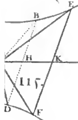
Planche 10 . pag. 104 .

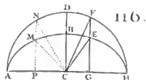

92
93
91
96
98
Planche 11 . pag. 118.

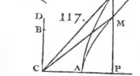


101.

106.

104.

105.


108

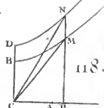



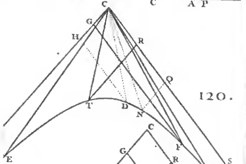


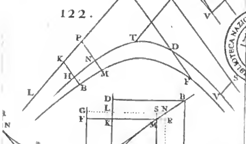














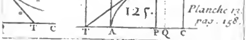
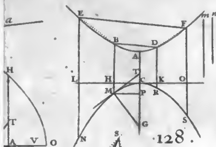
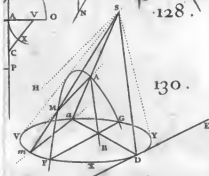
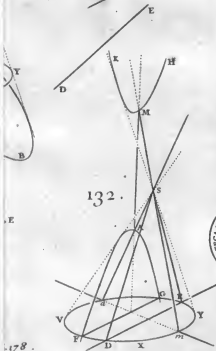


Planche 13.
pag. 158.

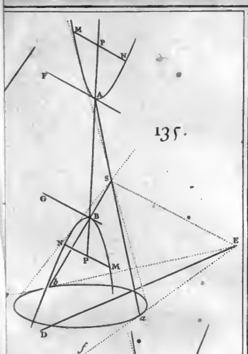

E
F
m
n
B
D
A
L
H
T
C
K
O
M
P
R
G
N
S
128.

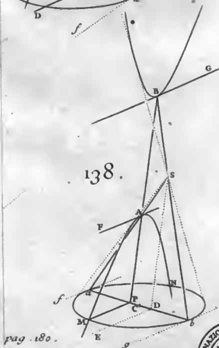

S
A
H
M
a
G
V
Y
E
m
B
F
X
D
130.


E
D
K
H
M
S
132.
A
a
G
R
V
Y
F
D
X
m

.178.




M
P
N
F
A
135.
S
G
B
E
N
P
M
b
a
D
f


G
B
138.
S
A
F
N
f
a
P
C
D
M
E
b
g
pag. 180.



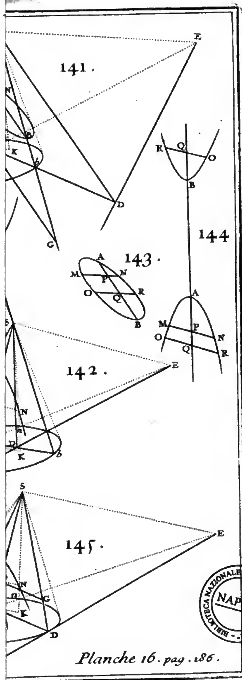
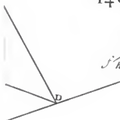
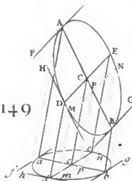


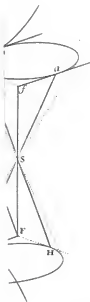
Planche 16. pag. 186.

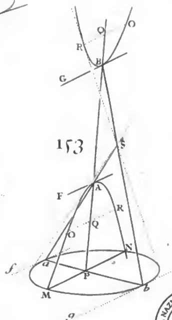
148



149



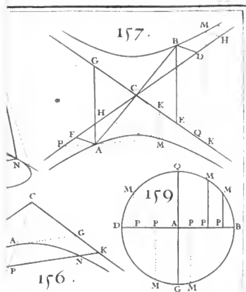


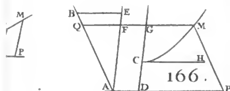


153

'7 . pag . 200 .







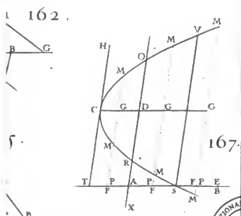
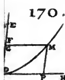
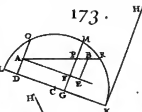
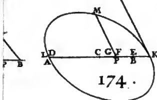


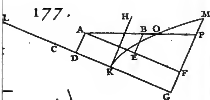
Planche 18. pag. 220

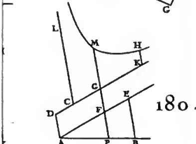


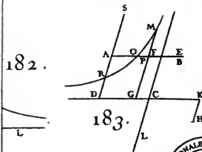

170.
E
F
G
M
D
P
H

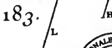

173.
H
O
M
A
P
B
R
L
D
F
E
C
G
K


H
M
L D
C G F E
K
A
P
B
174.

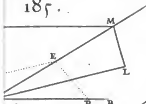

177.
L
C
D
A
H
B O
M
P
E
K
F
G

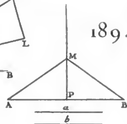

L
M
H
K
C
E
180.
D
F
A
P
B

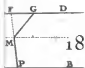

182.
S
M
A
O
F
E
P
B
R
D
G
C
K

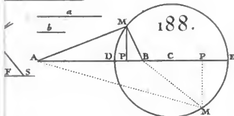

183.
H
L

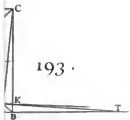


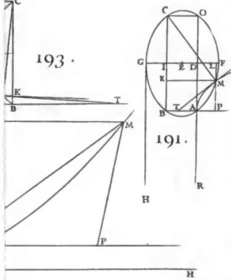

185.
M
E
L
R
B


189.
M
P
A
B
a
b


F
G
D
M
P
B
186.

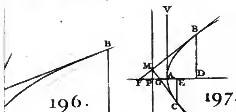

a
b
188.
M
A
D
P
B
C
P
E
M
F
S

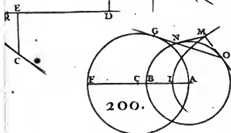

C
193.
K
B
T

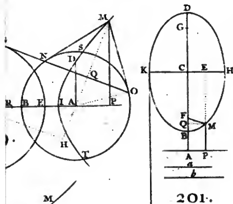

C
O
G
I
E
D
L
F
K
M
B
T
A
P
191.
M
P
H
R
H

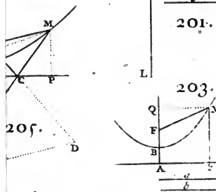
. pag . 266 .





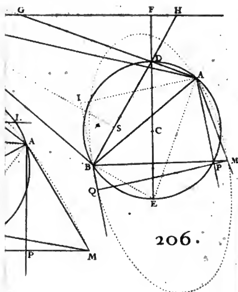


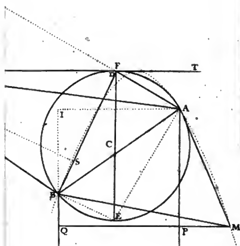




anche 21. pag. 282.

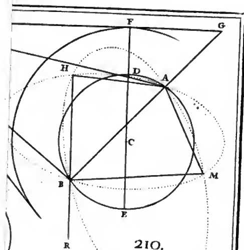


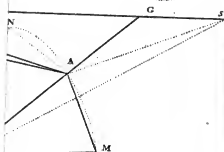




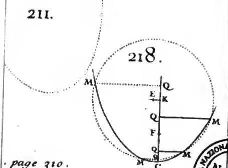
22 . pag . 288 .





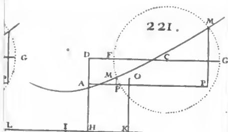


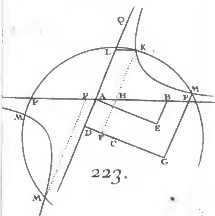
211.

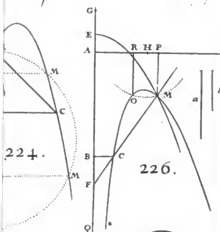


page 310.




221.
M
D
F
C
G
A
M
O
P
P
L
I
H
K
G


Q
L
K
M
P
P
A
H
B
P
M
D
F
C
E
G
M
223.


G
E
A
R
H
P
M
O
M
a
b
B
C
F
Q
226.
M
C
224.
M



228.

M K G C D E F P A B P M

D M C P A P B M 230. E

M P B 231.

D M K P B C A 233. E M

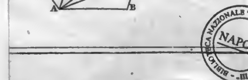
234. M E P B

236.

235.

242.

243.



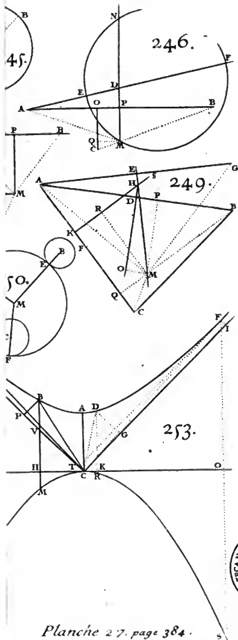
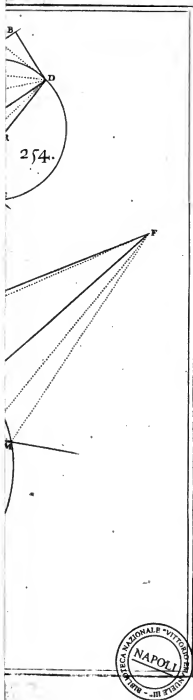
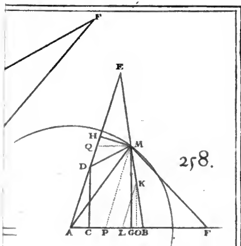
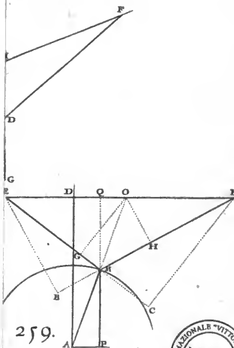


Planche 27. page 384.


B
D
254.
F


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI


F
E
H
Q
M
D
K
A
C
P
L
G
O
B
F
258.


F
D
G
E
D
Q
O
F
H
G
M
B
C
259.
A
P



60.

F

R

A

M

B K O D

X

S V

L

Q M R

T

H .262.

A P G . P C

E

B

G

263.

E

H

A I K F L C





275.

276.

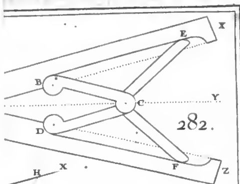
265.

277.

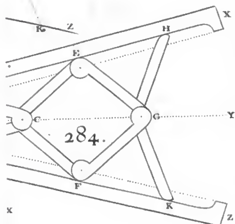
278.

274.

279.







X

35.



Z *Planche 32. page 458.*

